FICHE RECAPITULATIVE DEVELOPPEMENTS LIMITES

1) Formule de Taylor-Young :

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)}$$

avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

2) Développements limités usuels (à connaître parfaitement) :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x) \\ e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \\ \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^p\,\dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)\,. \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!}\cdots + (-1)^p\,\dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x)\,. \\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ \qquad \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)\,. \end{cases}$$

3) Développements limités et approximations :

Fonction	Développement limité ($x \to 0$)	Approximation ($x << 1$)
$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x\varepsilon(x)$	$\approx 1 + x$
e^x	$= 1 + x + x\varepsilon(x)$	$\approx 1 + x$
$\sin x$	$= x + x\varepsilon(x)$	$\approx x$ (x en radians)
$\cos x$	$= 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$	$\approx 1 - \frac{x^2}{2}$ (x en radians)
$\sqrt{1+x}$	$= 1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x)$	$\approx 1 + \frac{1}{2}x$

4) Multiplication de deux développements limités : On obtient le développement limité à l'ordre n du produit $f(x)\,g(x)$ en effectuant le produit des DL de $f(x)$ et $g(x)$ à l'ordre n, et en ne conservant dans la partie principale que les termes de degré inférieur ou égal à n.

5) Intégration des développements limités : Le DL à l'ordre $n+1$ de $F(x) = \int f(x)dx$ s'obtient en intégrant terme à terme le DL à l'ordre n de $f(x)$. La constante d'intégration est $F(0)$.

Exemple à connaître : Le DL de $\ln(1+x)$ s'obtient rapidement par intégration.
Par exemple, supposons qu'on ait besoin du DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\ln(1+x)$.
Partant du DL à l'ordre 2 de $\frac{1}{1-x}$, on a successivement par substitution et intégration :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x) \Rightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x) \\ &\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)\,,\ \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

6) Substitution : *Si* $g(0) = 0$, le DL de *la composée* $f(x) = h[g(x)]$ *s'obtient en remplaçant* x *par* $g(x)$ *dans le DL de* $h(x)$, *et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à* n.