Table des matières

Module 1 Outils fondamentaux **1**

Chapitre 1 : Trigonométrie **3**
1.1 Cercle trigonométrique 3
1.2 Symétries dans le cercle trigonométrique 5
1.3 Formules d'addition 6
1.4 Formules de duplication 7
1.5 Transformations de produits en sommes 7
1.6 Transformations de sommes en produits 8
Exercices 8

Chapitre 2 : Compléments de trigonométrie **11**
2.1 Inversion des fonctions trigonométriques 11
2.2 Résolution d'équations trigonométriques 13
2.3 Transformation d'expressions trigonométriques 13
2.4 Coordonnées polaires du plan 15
2.5 Fonctions sinusoïdales 16
Exercices 17

Chapitre 3 : Nombres complexes et trigonométrie **19**
3.1 Forme algébrique des nombres complexes 19
3.2 Plan complexe et forme trigonométrique 20
3.3 Exponentielle complexe 21
3.4 Forme exponentielle des nombres complexes 23
3.5 Formules d'Euler et linéarisation 23
3.6 Sommes trigonométriques et complexes 24
3.7 Sommes de fonctions sinusoïdales 26
Exercices 27

Chapitre 4 : Introduction aux déterminants **29**
4.1 Qu'est-ce qu'un déterminant ? 29
4.2 Calcul pratique des déterminants 30
4.3 Règle de Sarrus 32
4.4 Opérations sur les déterminants 33
4.5 Interversion de colonnes dans un déterminant 34
4.6 Formules de Cramer 35

4.6.1 Systèmes de deux équations à deux inconnues 35
4.6.2 Systèmes de trois équations à trois inconnues 36
Exercices 37

Chapitre 5 : Produit scalaire 39
5.1 Projection orthogonale sur un axe orienté 39
5.2 Produit scalaire et projection orthogonale 41
5.3 Propriétés algébriques du produit scalaire 42
5.4 Bases orthonormées du plan 43
5.4.1 Définition et exemples 43
5.4.2 Expression analytique du produit scalaire 44
5.4.3 Changement de base orthonormée 45
5.5 Bases orthonormées de l'espace 46
5.5.1 Définition 46
5.5.2 Coordonnées cylindriques et sphériques 46
5.5.3 Propriétés des bases orthonormées 48
Exercices 48

Chapitre 6 : Notions de géométrie plane 51
6.1 Le triangle 51
6.2 Le cercle 53
6.2.1 Circonférence et surface 53
6.2.2 Théorème de l'angle inscrit 54
6.3 Constructions à la règle et au compas 55
6.4 Similitudes du plan et triangles semblables 57
6.5 Barycentre 59
6.5.1 Définition du barycentre 59
6.5.2 Propriétés du barycentre 60
6.5.3 Barycentre et géométrie 61
Exercices 62

Chapitre 7 : Géométrie analytique du plan 67
7.1 Orthogonalité, distance, parallélisme 67
7.1.1 Orthogonalité et distance 67
7.1.2 Parallélisme 68
7.2 Equations cartésiennes 69
7.2.1 Définition 69
7.2.2 Equation normale d'une droite 70
7.2.3 Equation fonctionnelle d'une droite 71
7.2.4 Equation cartésienne d'un cercle 72
7.3 Equations polaires 73
7.4 Notions sur la parabole 74
7.5 Géométrie du plan complexe 74
7.5.1 Longueurs et angles 74
7.5.2 Transformations élémentaires du plan complexe. 76
7.5.3 Similitude complexe 78

Exercices 79

Chapitre 8 : Produit vectoriel et produit mixte 83
8.1 Produit vectoriel 83
8.2 Bases orthonormées directes 85
8.2.1 Dans le plan 85
8.2.2 Dans l'espace 85
8.2.3 Expression analytique du produit vectoriel 85
8.3 Produit mixte de trois vecteurs de l'espace 87
8.3.1 Définition et premières propriétés 87
8.3.2 Expression analytique du produit mixte 88
Exercices 88

Chapitre 9 : Géométrie analytique de l'espace 91
9.1 Equation cartésienne d'une sphère 91
9.2 Equation cartésienne d'un plan 92
9.3 Distance d'un point à un plan 94
9.4 Droites de l'espace 94
Exercices 95

Chapitre 10 : Introduction au calcul différentiel 99
10.1 Dérivée d'une fonction en un point 99
10.2 Opérations sur les fonctions dérivables 102
10.3 Notation de Leibniz 103
10.4 Dérivée d'une fonction composée 104
10.5 Notions de cinématique 105
10.5.1 Trajectoire, vitesse et accélération 105
10.5.2 Cas des coordonnées polaires 107
10.5.3 Mouvement rectiligne 108
10.5.4 Mouvement circulaire 109
Exercices 110

Chapitre 11 : Compléments de calcul différentiel 115
11.1 Dérivées des exposants rationnels 115
11.1.1 La longue histoire des exposants 116
11.1.2 Dérivées des exposants fractionnaires 117
11.2 Dérivées des fonctions réciproques 119
11.3 Un exemple de calcul infinitésimal 120
11.4 Dérivée de l'exponentielle complexe 121
11.5 Dérivées partielles 121
11.5.1 Fonctions de plusieurs variables 121
11.5.2 Dérivées partielles 122
Exercices 123

Chapitre 12 : Exponentielles et logarithmes 127
12.1 Fonctions exponentielles 127

12.1.1 Définition et propriété fondamentale 127
12.1.2 Dérivée des fonctions exponentielles 128
12.1.3 Limites et formes indéterminées 129
12.1.4 Fonction exponentielle complexe 130
12.2 Fonctions logarithmes 131
12.2.1 Définition et exemples 131
12.2.2 Propriété fondamentale 132
12.2.3 Le rôle central du logarithme népérien 133
12.3 Trigonométrie hyperbolique 134
12.3.1 Définition et formules d'addition 134
12.3.2 Dérivées et représentations graphiques 136
Exercices 137

Module 2 Fonctions de variable réelle 141

Chapitre 13 : Représentations graphiques 143
13.1 Plan général d'étude d'une fonction 143
13.2 Ensemble de définition d'une fonction 144
13.3 Réduction de l'ensemble d'étude 145
13.3.1 Fonctions paires et impaires 145
13.3.2 Fonctions périodiques 146
13.4 Asymptotes 146
13.5 Branches paraboliques 148
13.6 Tangente en un point 149
13.7 Points d'inflexion 151
Exercices 152

Chapitre 14 : Primitives 155
14.1 Primitives d'une fonction 155
14.2 Calculs élémentaires de primitives 157
14.3 Intégration par parties 158
14.4 Primitives de fonctions trigonométriques 159
14.5 Changement de variable 160
Exercices 161

Chapitre 15 : Intégrales 163
15.1 Définition et interprétation géométrique 163
15.2 Propriétés élémentaires des intégrales 165
15.3 Intégration par parties 167
15.4 Changement de variable 168
15.5 Applications du calcul intégral 169
15.5.1 Volume de la sphère 169
15.5.2 Surface de la sphère 169
15.5.3 Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle 170
Exercices 171

Chapitre 16 : Equations différentielles homogènes . . . 175
16.1 Equation linéaire homogène du premier ordre . . . 175
16.2 Equation de l'oscillateur harmonique . . . 176
16.3 Equation du second ordre (cas général) . . . 178
16.4 Exemple de système différentiel linéaire . . . 179
16.5 Amortissement et oscillations libres . . . 180
16.5.1 Equation du premier ordre . . . 180
16.5.2 Equation du second ordre . . . 181
Exercices . . . 182

Chapitre 17 : Equations différentielles non homogènes . . . 185
17.1 Principe général de résolution . . . 185
17.2 Second membre constant . . . 186
17.3 Second membre sinusoïdal . . . 186
17.3.1 Première méthode . . . 186
17.3.2 Deuxième méthode . . . 187
17.4 Principe de superposition . . . 187
17.5 Solution permanente et solution transitoire . . . 188
Exercices . . . 189

Chapitre 18 : Autres équations différentielles . . . 191
18.1 Equations à variables séparables . . . 191
18.2 Méthode de variation de la constante . . . 192
18.3 Changement de fonction inconnue . . . 194
18.4 Changement de variable . . . 196
18.5 Problème de Cauchy . . . 197
Exercices . . . 198

Chapitre 19 : Développements limités . . . 201
19.1 Exemple et définition . . . 201
19.2 Formule de Taylor-Young . . . 202
19.3 Développements limités et approximations . . . 204
19.4 Opérations sur les développements limités . . . 204
19.4.1 Substitutions élémentaires . . . 204
19.4.2 Addition de développements limités . . . 205
19.4.3 Multiplication de deux développements limités . . . 206
19.4.4 Intégration des développements limités . . . 206
19.4.5 Substitutions non élémentaires . . . 207
19.5 Généralisations . . . 208
19.5.1 Développement limité au voisinage de a . . . 208
19.5.2 Développements asymptotiques . . . 209
Exercices . . . 210

Module 3 Mathématiques discrètes 213

Chapitre 20 : Nombres entiers et arithmétique 215
20.1 Entiers naturels et récurrence 215
20.2 Entiers relatifs et division euclidienne 217
20.2.1 Multiples et diviseurs 217
20.2.2 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ 219
20.3 Théorème de Bézout et conséquences 221
20.4 Nombres premiers 223
20.5 Congruences 225
Exercices 227

Chapitre 21 : Analyse combinatoire 231
21.1 Coefficients binomiaux et triangle de Pascal 231
21.2 Formule du binôme de Newton 234
21.3 Formule de Leibniz 236
21.4 Arrangements, permutations, combinaisons 237
Exercices 239

Chapitre 22 : Suites classiques 243
22.1 Suites arithmétiques 243
22.2 Suites géométriques 245
22.3 Récurrences linéaires du second ordre 247
22.4 Sommes et produits de termes consécutifs 250
22.4.1 Formules sommatoires 250
22.4.2 Sommes télescopiques 252
22.4.3 Opérations sur les sommes discrètes 253
22.4.4 Produits de termes consécutifs 254
22.5 Sommes et produits d'égalités 255
22.6 Suites et sommes doubles 257
Exercices 258

Chapitre 23 : Suites convergentes 263
23.1 Qu'est-ce qu'une suite convergente ? 263
23.1.1 Exemples de suites de nombres réels convergentes 263
23.1.2 Définition mathématique d'une suite convergente 266
23.1.3 Suites divergentes 267
23.2 Convergence d'une suite géométrique 268
23.3 Théorème des suites monotones 269
23.4 Théorème des suites adjacentes 272
23.5 Suites extraites 273
Exercices 273

Module 4 Algèbre . . . 277

Chapitre 24 : Langage de la logique et des ensembles . . . 279
24.1 Langage de la logique . . . 279
24.1.1 Proposition logique . . . 279
24.1.2 Conjonction, disjonction, négation . . . 280
24.1.3 Implication et équivalence . . . 280
24.1.4 Raisonnements par contraposition et par l'absurde . . . 282
24.1.5 Quantificateurs . . . 282
24.2 Ensembles et algèbre de Boole . . . 283
24.2.1 Notion d'ensemble . . . 283
24.2.2 Inclusion . . . 283
24.2.3 Intersection et réunion . . . 284
24.2.4 Produit cartésien . . . 285
24.2.5 Relations d'ordre et d'équivalence . . . 285
24.3 Cardinal d'un ensemble fini . . . 287
24.4 Application d'un ensemble dans un autre . . . 288
24.4.1 Applications et fonctions . . . 288
24.4.2 Composition des applications . . . 289
24.4.3 Image d'un ensemble par une application . . . 290
24.5 Injections, surjections et bijections . . . 290
24.5.1 Injections et surjections . . . 290
24.5.2 Bijections . . . 291
Exercices . . . 293

Chapitre 25 : Equations et polynômes . . . 295
25.1 Equations . . . 295
25.1.1 Racines n-ièmes d'un nombre complexe . . . 295
25.1.2 Racines carrées d'un nombre complexe . . . 297
25.1.3 Equation du second degré dans $\mathbb{C}$ . . . 297
25.2 Polynômes . . . 298
25.2.1 Division euclidienne des polynômes . . . 298
25.2.2 Racines d'un polynôme et factorisation . . . 301
25.2.3 Racines simples et racines multiples . . . 302
25.2.4 Théorème de d'Alembert . . . 303
25.2.5 Relations entre coefficients et racines . . . 304
25.2.6 Factorisation dans $\mathbb{R}[x]$ . . . 305
25.3 Compléments . . . 306
25.3.1 Algorithme de Horner . . . 306
25.3.2 Dérivée formelle d'un polynôme . . . 307
25.3.3 Formules de Leibniz et Taylor . . . 309
Exercices . . . 310

Chapitre 26 : Fractions rationnelles . . . 313
26.1 Décomposition en éléments simples . . . 313
26.2 Calcul de la partie entière . . . 316

26.3 Cas des pôles réels . . . 316
26.3.1 Pôles réels simples . . . 316
26.3.2 Pôles réels doubles . . . 317
26.4 Eléments simples de deuxième espèce . . . 318
26.5 Primitives des fractions rationnelles . . . 319
26.5.1 Un exemple élémentaire . . . 319
26.5.2 Primitives des éléments simples de deuxième espèce . . . 320
Exercices . . . 321

Chapitre 27 : Groupes, anneaux et corps . . . 323
27.1 Groupes . . . 323
27.2 Sous-groupes . . . 325
27.3 Permutations et groupe symétrique . . . 326
27.3.1 Définition et exemples . . . 326
27.3.2 Groupe symétrique . . . 327
27.4 Anneaux . . . 329
27.4.1 Définition et exemples . . . 329
27.4.2 Sous-anneaux . . . 331
27.5 Corps . . . 331
Exercices . . . 332

Chapitre 28 : Théorie des déterminants . . . 337
28.1 Définition d'un déterminant . . . 337
28.2 Calcul pratique des déterminants . . . 339
28.2.1 Interversion de lignes ou de colonnes . . . 339
28.2.2 Développement d'un déterminant . . . 340
28.2.3 Linéarité des déterminants . . . 341
28.3 Déterminant de Vandermonde . . . 342
28.4 Formules de Cramer . . . 344
Exercices . . . 346

Module 5 Compléments d'analyse . . . 349

Chapitre 29 : Limites et équivalents . . . 351
29.1 Limites et formes indéterminées . . . 351
29.2 Comparaison locale de deux fonctions . . . 353
29.2.1 Equivalents et limites . . . 353
29.2.2 Opérations sur les équivalents . . . 355
29.2.3 Suites équivalentes . . . 357
29.3 Deux techniques de calcul de limites . . . 357
29.3.1 Changement de variable . . . 357
29.3.2 Théorème d'encadrement . . . 357
29.4 Définition mathématique d'une limite . . . 358
Exercices . . . 360

Chapitre 30 : Continuité et dérivabilité . . . 363
30.1 Partie entière et valeur absolue . . . 363
30.1.1 Partie entière d'un nombre réel . . . 363
30.1.2 Valeur absolue . . . 364
30.2 Généralités sur les fonctions continues . . . 365
30.2.1 Définition et exemples . . . 365
30.2.2 Opérations sur les fonctions continues . . . 366
30.2.3 Prolongement par continuité . . . 366
30.3 Fonctions continues sur un intervalle . . . 367
30.4 Généralités sur les fonctions dérivables . . . 370
30.4.1 Dérivabilité à gauche et à droite . . . 370
30.4.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ . . . 371
30.5 Fonctions dérivables sur un intervalle . . . 372
30.5.1 Dérivée en un extremum . . . 372
30.5.2 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis . . . 373
30.5.3 Inégalités des accroissements finis . . . 374
30.6 Continuité uniforme . . . 376
30.7 Nombres réels et continuité . . . 377
Exercices . . . 378

Chapitre 31 : Compléments de calcul intégral . . . 381
31.1 Fonctions continues par morceaux . . . 381
31.2 Majoration des intégrales . . . 383
31.3 Intégrale fonction de sa borne du haut . . . 386
31.4 Formule de Taylor avec reste intégral . . . 388
31.5 Intégrales de Wallis . . . 390
31.6 Théorie de l'intégrale de Riemann . . . 392
Exercices . . . 399

Chapitre 32 : Séries . . . 403
32.1 Définition et exemples . . . 403
32.2 Critère grossier de divergence . . . 406
32.3 Séries à termes positifs . . . 406
32.4 Absolue convergence . . . 410
32.5 Théorème des séries alternées . . . 412
32.6 Séries et bases de numération . . . 412
32.7 Séries doubles . . . 414
Exercices . . . 418

Chapitre 33 : Fonctions de deux variables . . . 423
33.1 Représentation graphique, limites et continuité . . . 423
33.2 Dérivées partielles et différentiabilité . . . 426
33.3 Gradient en un point . . . 428
33.4 Extremums des fonctions de deux variables . . . 431
33.4.1 Plan tangent et points critiques . . . 431
33.4.2 Extremums d'une fonction de deux variables . . . 432

33.4.3 Méthode des moindres carrés 434
33.5 Changement de variable 436
33.5.1 Variables liées 436
33.5.2 Dérivation en chaîne 437
33.6 Equations aux dérivées partielles 439
33.7 Parties fermées bornées 441
Exercices 442

Chapitre 34 : Introduction à l'analyse numérique 447
34.1 Analyse numérique et algorithmes 447
34.2 Méthodes de dichotomie et de Lagrange 448
34.2.1 Méthode de dichotomie 448
34.2.2 Méthode de Lagrange 450
34.3 Calcul numérique des intégrales 452
34.3.1 Méthode des rectangles 452
34.3.2 Méthode des trapèzes 453
34.3.3 Méthode de Simpson 454
34.4 Méthodes d'Euler et de Runge-Kutta 455
34.4.1 Méthode d'Euler 455
34.4.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 456
34.5 Rapidité de convergence et approximation 457
Exercices 459

Module 6 Calcul matriciel et algèbre linéaire 461

Chapitre 35 : Matrices 463
35.1 Premières notions sur les matrices 463
35.1.1 Définition des matrices 463
35.1.2 Addition et multiplication par un scalaire 464
35.1.3 Multiplication matricielle 464
35.1.4 Transposition 467
35.2 Interprétation matricielle des systèmes d'équations linéaires 468
35.3 Algèbre des matrices carrées 469
35.3.1 Introduction 469
35.3.2 Formule du binôme de Newton 470
35.3.3 Matrices carrées inversibles 471
35.3.4 Calcul de l'inverse par inversion de système 472
35.3.5 Déterminant et comatrice 474
Exercices 476

Chapitre 36 : Méthode du pivot de Gauss 481
36.1 Etude d'un exemple 481
36.2 Relations de compatibilité 483
36.3 Inversion de matrice carrée 485
Exercices 486

Chapitre 37 : Vecteurs **489**
37.1 Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ 489
37.1.1 Addition de deux vecteurs 490
37.1.2 Multiplication par un scalaire 490
37.2 Bases de $\mathbb{K}^n$ 491
37.3 Changement de base 493
37.4 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ 495
Exercices 498

Chapitre 38 : Endomorphismes et matrices **501**
38.1 Définition et exemples 501
38.2 Matrice d'un endomorphisme dans une base 503
38.3 Changement de base 505
38.4 Composée de deux endomorphismes 508
Exercices 509

Chapitre 39 : Fondements de l'algèbre linéaire **513**
39.1 Espaces vectoriels 513
39.2 Sous-espaces vectoriels 515
39.2.1 Définition et caractérisation 515
39.2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels 517
39.3 Bases d'un espace vectoriel 518
39.3.1 Définition et exemples fondamentaux 518
39.3.2 Familles libres et familles génératrices 519
39.3.3 Bases et dimension 522
39.4 Rang d'une famille de vecteurs 523
39.5 Sommes de sous-espaces vectoriels 525
39.5.1 Définition et propriétés 525
39.5.2 Somme directe 527
39.5.3 Sous-espaces supplémentaires 528
39.6 Compléments théoriques 529
39.6.1 Théorème de la base incomplète 529
39.6.2 Sous-espaces en dimension finie 532
Exercices 533

Chapitre 40 : Applications linéaires **537**
40.1 Introduction 537
40.2 Noyau d'une application linéaire 539
40.3 Matrice d'une application linéaire 541
40.3.1 Définition et exemples 541
40.3.2 Opérations sur les matrices 542
40.4 Image d'une application linéaire 544
40.5 Théorème du rang 545
40.6 Projecteurs et symétries 547
Exercices 549

Chapitre 41 : Espaces euclidiens **553**
41.1 Produit scalaire et orthogonalité 553
41.1.1 Espaces préhilbertiens réels 553
41.1.2 Norme d'un vecteur 554
41.1.3 Orthogonalité 556
41.2 Espaces euclidiens 556
41.2.1 Bases orthonormales 556
41.2.2 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel 558
41.2.3 Rotations de l'espace $\mathbb{R}^3$ 559
41.2.4 Matrices orthogonales 560
41.3 Algorithme de Gram-Schmidt 562
Exercices 563

Module 7 Probabilités 567

Chapitre 42 : Fondements du calcul des probabilités **569**
42.1 Epreuves et évènements 569
42.2 Espaces probabilisés 571
42.2.1 Définition 571
42.2.2 Equiprobabilité 573
42.3 Probabilités conditionnelles 575
42.4 Indépendance 577
Exercices 578

Chapitre 43 : Variables aléatoires discrètes finies **583**
43.1 Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ? 583
43.2 Variables aléatoires discrètes finies 584
43.2.1 Loi de probabilité 584
43.2.2 Espérance, variance et écart-type 585
43.2.3 Fonctions de variables aléatoires 587
43.3 Modèles probabilistes discrets 588
43.3.1 Loi uniforme 588
43.3.2 Loi de Bernoulli 589
43.3.3 Loi binomiale 590
43.4 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev 592
Exercices 593

Chapitre 44 : Couples de variables aléatoires **597**
44.1 Couples de variables aléatoires 597
44.2 Sommes de variables aléatoires 600
44.3 Coefficient de corrélation linéaire 601
44.4 Variables aléatoires indépendantes 603
44.5 Loi des grands nombres 605
Exercices 607

Solutions des exercices **611**
Exercices du module 1 611
Exercices du module 2 667
Exercices du module 3 705
Exercices du module 4 731
Exercices du module 5 760
Exercices du module 6 799
Exercices du module 7 841

Index **863**