CHAPITRE 31

SUITES CONVERGENTES

Les suites convergentes de nombres réels sont l'outil de base de l'analyse numérique (chapitre 32), qui fournit des solutions numériques aux problèmes que l'on rencontre dans les applications. Elles interviennent également dans la définition des séries (chapitre 40). Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :
A. Savoir ce qu'est une suite convergente.
B. Savoir sous quelle condition une suite géométrique est convergente.
C. Connaître et savoir utiliser le théorème des suites monotones.
D. Connaître et savoir utiliser les suites adjacentes.

31.1 Qu'est-ce qu'une suite convergente ?

On dit que la suite de nombres réels u_n est *convergente* si elle a une *limite finie* lorsque n tend vers $+\infty$. Nous donnons 4 exemples qui illustrent cette notion, dont nous préciserons ensuite la définition mathématique.

31.1.1 Exemples de suites convergentes

Exemple 31.1 Soit la suite u_n définie par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3. \tag{31.1}$$

On peut *visualiser* facilement la convergence (ou la divergence) de la suite u_n, car on observe que $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = -\frac{1}{2}x+3$. La représentation graphique de $y = f(x)$ est une droite (figure 31.1). On trace également sur le graphique la première bissectrice, d'équation $y = x$. Partant de u_0 en abscisse, on remonte jusqu'à $y = f(x)$, et on obtient en ordonnée $u_1 = f(u_0)$. Le point de la première bissectrice d'ordonnée u_1 a aussi pour abscisse u_1, ce qui permet de reporter graphiquement u_1 en abscisse. On peut alors recommencer : puisque $u_2 = f(u_1)$, on obtient u_2 en ordonnée à partir de $y = f(x)$. On reporte u_2 en abscisse grâce à la première bissectrice, etc. On a indiqué sur la figure les valeurs de u_3, u_4, ...

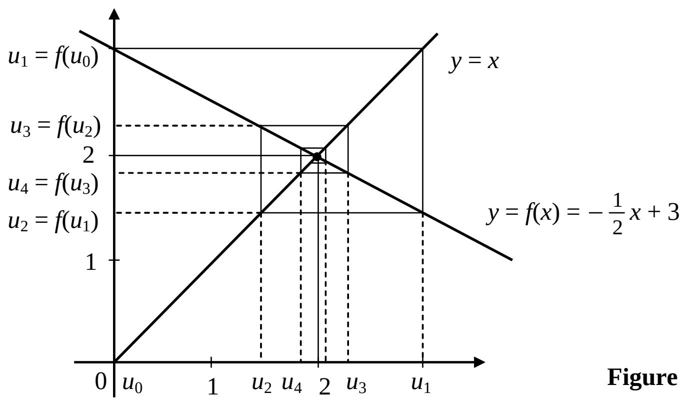

Figure 31.1

Le graphique montre que la suite u_n semble converger vers l'abscisse L du point d'intersection de la droite $y = x$ et de la droite $y = f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$. On obtient la valeur de L en résolvant l'équation $x = -\frac{1}{2}x + 3$, qui a pour solution $x = 2$. La figure 31.1 indique donc que la suite u_n converge vers $L = 2$. Nous donnerons une démonstration rigoureuse de ce résultat dans la section suivante. Le graphique de la figure 31.1, qui ressemble à une toile d'araignée, est parfois nommé *cobweb*.

On peut visualiser d'une autre manière la convergence de u_n vers 2 : il suffit pour cela de calculer, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, les valeurs numériques successives de u_n (ci-dessous par exemple pour $n = 0$ jusqu'à 19 avec 4 décimales après la virgule) :

n	u_n
0	0,0000
1	3,0000
2	1,5000
3	2,2500
4	1,8750

n	u_n
5	2,0625
6	1,9688
7	2,0156
8	1,9922
9	2,0039

n	u_n
10	1,9981
11	2,0010
12	1,9995
13	2,0002
14	1,9999

n	u_n
15	2,0001
16	2,0000
17	2,0000
18	2,0000
19	2,0000

On voit les valeurs numériques de u_n se "rapprocher" de 2.

Exemple 31.2 Soit la suite v_n définie par son premier terme $v_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{v_n^3 + 1}{3}. \tag{31.2}$$

Comme pour la suite u_n de l'exemple précédent, on peut effectuer une étude graphique du comportement de v_n à l'aide du graphe de la fonction $g(x) = \frac{x^3+1}{3}$ et de la première bissectrice. On observe que la suite v_n semble converger, en décroissant, vers l'abscisse L du point d'intersection de la première bissectrice et du graphe de g.

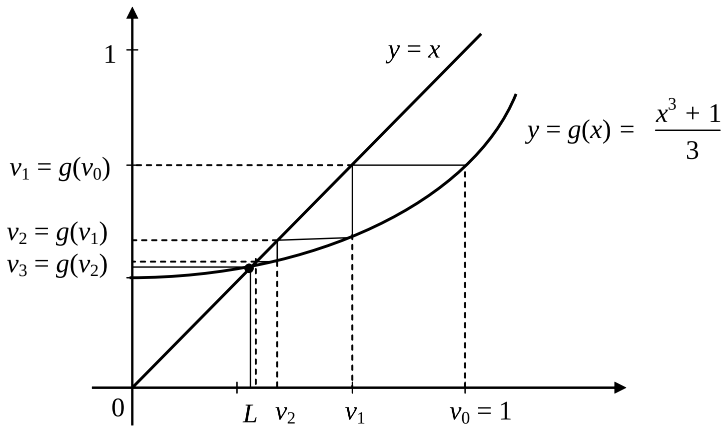

Figure 31.2

La limite L de la suite v_n vérifie donc $L = \frac{L^3+1}{3} \Leftrightarrow L^3 - 3L + 1 = 0$. Ici, contrairement à l'exemple précédent, nous ne savons pas résoudre l'équation et trouver la valeur exacte de L. Mais en fait, nous allons prendre le problème à l'envers, et utiliser la suite v_n pour obtenir une valeur numérique d'une solution de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$. Si nous calculons, au moyen d'une calculatrice ou d'un tableur, les premières valeurs de la suite v_n avec 7 décimales après la virgule par exemple, nous obtenons

n	v_n
0	1,0000000
1	0,6666667
2	0,4320988
3	0,3602256
4	0,3489146

n	v_n
5	0,3474924
6	0,3473200
7	0,3472992
8	0,3472967
9	0,3472964

n	v_n
10	0,3472964
11	0,3472964
12	0,3472964
13	0,3472964
14	0,3472964

Le tableau ci-dessus nous permet d'écrire que $L \approx 0,3472964...$ Ainsi, *l'utilisation de la suite v_n nous a permis de trouver une valeur numérique approchée d'une solution de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$.*

Exemple 31.3 Nous considérons maintenant une suite d'une nature différente, définie pour $n \geq 1$ comme une *somme* :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}. \tag{31.3}$$

Il est facile de visualiser les termes successifs de cette suite grâce au schéma ci-dessous. Partons d'un segment de longueur 1 et partageons-le en 2 parties égales : à gauche, nous avons donc une longueur $\frac{1}{2}$. Partageons la partie droite en 2 parties égales : chacune d'elles a une longueur $\frac{1}{4}$, et nous ajoutons la partie gauche à $\frac{1}{2}$ pour obtenir $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. On procède ainsi en divisant en 2 la partie restante pour construire S_3, S_4, ... Le graphique montre que la suite S_n converge vers 1 et qu'elle est croissante.

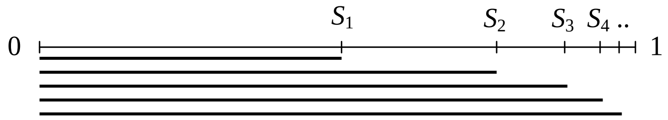

Figure 31.3

Exemple 31.4 Soit la suite T_n définie pour $n \geq 0$ par

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}. \tag{31.4}$$

Pour visualiser la convergence de cette suite, nous n'avons à notre disposition aucun procédé géométrique, contrairement aux exemples précédents. Toutefois, si nous calculons numériquement les premiers termes, nous obtenons le tableau ci-dessous. Ainsi, avec 7 décimales après la virgule, la suite T_n semble converger vers la valeur numérique 2,7182818.

n	T_n
0	1,0000000
1	2,0000000
2	2,5000000
3	2,6666667

n	T_n
4	2,7083333
5	2,7166667
6	2,7180556
7	2,7182540

n	T_n
8	2,7182788
9	2,7182815
10	2,7182818
11	2,7182818

On reconnaît ici les premières décimales du nombre e, base du logarithme népérien. En fait, la suite T_n définie par (31.4) constitue le moyen le plus simple d'obtenir la valeur numérique de e (exercice 31.3 et exemple 39.5).

31.1.2 Définition mathématique d'une suite convergente

Dans beaucoup d'applications, la notion intuitive de limite utilisée jusqu'à présent suffit. Pourtant, pour aller plus loin, il est nécessaire de *formaliser* cette notion et d'en donner une *définition mathématique précise.*

Définition 31.1 *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite u_n (de nombres réels ou complexes)* converge *vers ℓ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon \tag{31.5}$$

On note alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ *et on dit que u_n est convergente. On dit que la suite* diverge *si elle ne converge vers aucun réel.*

La convergence vers ℓ peut s'énoncer ainsi : étant donné $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe un rang N à partir duquel $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$. La figure 31.4 montre comment la définition ci-dessus traduit la notion intuitive de limite : la suite u_n "se rapproche" de ℓ.

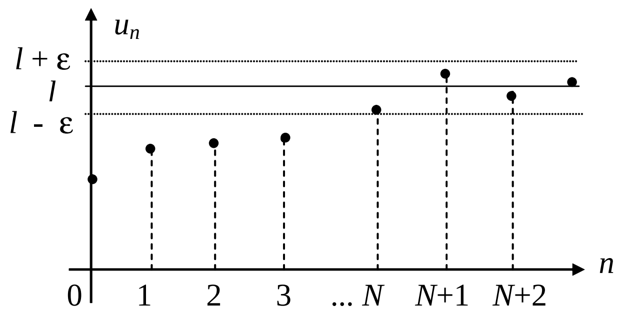

Figure 31.4

Ce qu'il faut bien comprendre dans cette définition, c'est que ε peut être rendu aussi petit que l'on veut. C'est l'utilisateur qui fixe le epsilon, et qui détermine le N à partir duquel on a $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$. Par exemple, le tableau des valeurs de la suite u_n (exemple 31.1) montre que si nous prenons $\varepsilon = 5.10^{-5}$, alors on a $2 - \varepsilon \leq u_n \leq 2 + \varepsilon$ dès lors que $N \geq 16$, puisque l'arrondi à la quatrième décimale se fait "au plus proche", c'est-à-dire au chiffre supérieur si la cinquième décimale est 5, 6, 7, 8 ou 9, et au chiffre inférieur si la cinquième décimale est 0, 1, 2, 3, 4. Obtenir numériquement $\ell = 2{,}0000$ signifie donc que $1{,}99995 \leq u_n < 2{,}00005$.

Naturellement, pour avoir $\varepsilon = 5.10^{-6}$ par exemple, c'est-à-dire avoir 5 décimales exactes au lieu de 4, il faudrait prendre N plus grand et effectuer les calculs avec 6 décimales au moins.

31.1.3 Suites divergentes

La définition d'une suite convergente exprime que la suite u_n *a une limite*, et que celle-ci est un nombre réel ℓ, c'est-à-dire que cette limite est *finie*. Nous aurons donc deux types de suites divergentes : d'abord les suites qui ont une limite infinie, et puis celles qui n'ont pas de limite.

Définition 31.2 *On dit que la suite u_n tend vers $+\infty$ ou* diverge *vers $+\infty$, et on note* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, *si*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A.$$

Autrement dit, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, aussi grands que l'on veut. La figure 31.5 schématise cette situation.

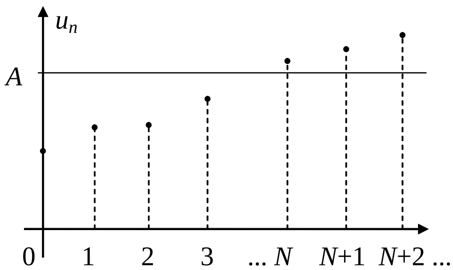

Figure 31.5

Définition 31.3 *On dit que la suite u_n tend vers $-\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Longrightarrow u_n \leq A.$$

Ceci revient à dire que la suite $-u_n$ tend vers $+\infty$.

Donnons enfin un exemple de suite qui n'a pas de limite. Cet exemple est basé sur l'idée suivante : *si une suite converge, sa limite ℓ est unique.* Ce résultat peut se démontrer à partir de la définition (voir exercice 31.15).

Exemple 31.5 La suite définie par $u_n = \cos\left(\dfrac{n^2-1}{n}\pi\right)$ diverge.
En effet $u_{2p} = \cos\left(\frac{4p^2-1}{2p}\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2p} + 2p\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2p}$ et

$$u_{2p+1} = \cos\left(\frac{4p^2+4p}{2p+1}\pi\right) = \cos\left(\frac{2p\,(2p+1)+2p}{2p+1}\pi\right) = \cos\left(\frac{2p}{2p+1}\pi\right).$$

Par conséquent $\lim_{p\to+\infty} u_{2p} = \cos 0 = 1$ et $\lim_{p\to+\infty} u_{2p} = \cos\pi = -1$. Les suites de rang pair et impair convergent vers des limites différentes. Donc la suite u_n diverge.

Exercices du chapitre 31

Les basiques

Exercice 31.1 (A,C) Soit u_n définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.
1) Démontrer par récurrence que u_n est croissante et majorée par 2.
Conclusion ? Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
2) Représenter graphiquement $f(x) = \sqrt{2x}$ sur $[0, +\infty[$. Utiliser ce graphique pour vérifier les résultats précédents.

Exercice 31.2 (A,B) Soit u_n définie par $u_0 = 7$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -\frac{1}{5}u_n + 6$. Démontrer que la suite $v_n = u_n - 5$ est une suite géométrique. En déduire que u_n est convergente et trouver sa limite.

Exercice 31.3 (D) On pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

Démontrer que u_n et v_n sont adjacentes.

Exercice 31.4 (A,C) Soit u_n définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2 + 1$.
1) Démontrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Démontrer par récurrence que u_n est croissante.
3) Démontrer par récurrence que u_n est majorée par 2. Qu'en conclut-on ?
4) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
5) Que se passe-t-il si la suite u_n vérifie la même relation de récurrence, mais avec un premier terme $u_0 = 3$?

Exercice 31.5 (A,C,D) Soit u_n définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n^2 + 1$.
1) Etudier u_n sur un graphique. Que remarque-t-on ?
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
3) On considère les suites extraites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Démontrer par récurrence que v_n est croissante et w_n est décroissante.
En déduire que v_n et w_n sont convergentes.
4) Montrer que v_n et w_n ont la même limite. Que peut-on dire de v_n et w_n ?
5) En déduire que la suite u_n est convergente et calculer sa limite.

Exercice 31.6 (A) Soit $u_n = \frac{1}{n^7} \sum_{k=1}^{n} k^5$. Démontrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que u_n est convergente et trouver sa limite.

Exercice 31.7 (A,C) Soit $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ $(n \geq 1)$.

1) Ecrire u_n grâce au signe $\sum$.
2) Démontrer que u_n est croissante.
3) En observant que $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$ pour tout $k \geq 0$, démontrer que $u_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Conclusion ?
4) Représenter graphiquement la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $[0,1]$.
5) En remarquant que

$$u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+1},$$

interpréter u_n comme une somme de surfaces de rectangles sur le graphique précédent.
6) Que deviennent ces rectangles lorsque $n \to +\infty$? En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 31.8 (D) Soient $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$.
Montrer que u_n et v_n sont convergentes.

Exercice 31.9 (D) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que les suites extraites $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$ sont adjacentes. En déduire la convergence de S_n.

Exercice 31.10 (C,D) Cet exercice présente, sous une forme évidemment modernisée, un procédé de calcul de $\sqrt{2}$ qui se trouve sur une tablette d'argile provenant des fouilles de Babylone.
La suite u_n est définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u_n} + u_n\right) = f(u_n).$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 sous forme de fractions.
2) Démontrer par récurrence que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$.
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{2}$.
4) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n. En déduire que la suite u_n est décroissante.
5) Démontrer que la suite u_n est convergente et calculer sa limite.
6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{2}{u_n}$. Démontrer que u_n et v_n sont adjacentes.
7) Déduire de ce qui précède un encadrement de $\sqrt{2}$, permettant d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ avec quatre décimales exactes.

Les techniques

Exercice 31.11 Soient u_n et v_n définies pour $n \geq 2$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

1) Montrer la double inégalité (I) : pour tout $x \geq 0$, $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2) Montrer que les suites u_n et v_n sont adjacentes. Leur limite commune s'appelle la *constante d'Euler* et se note γ. Comment peut-on calculer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près ?
3) Interpréter u_n à l'aide d'une somme de surfaces et de la représentation graphique de $y = \frac{1}{x}$.

Exercice 31.12 Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$.
1) Montrer que u_n est bornée.
2) Montrer que u_n est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 31.13 On définit u_n par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Etudier la convergence de cette suite.

Exercice 31.14 Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on considère l'équation $x^n + x - 1 = 0$ (E_n), où l'inconnue x est recherchée dans $]0, +\infty[$.
1) Résoudre l'équation (E_n) pour $n = 1$ et $n = 2$.
2) Etudier les variations de la fonction $x \to x^n + x - 1$ sur $[0, +\infty[$ pour $n \geq 1$. En déduire que l'équation (E_n) admet une et une seule racine positive qu'on notera x_n et montrer que $0 < x_n < 1$ pour tout $n \geq 1$.
3) On considère la fonction $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$. Déterminer l'ensemble de définition D de f, et prouver que f est strictement croissante sur D.
4) Montrer que $f(x_n) = n$ pour tout $n \geq 1$.
5) Prouver que la suite x_n est strictement croissante.
6) En déduire la convergence de la suite x_n vers un nombre réel L, et préciser la valeur de L.

Exercice 31.15 Soit u_n une suite convergente. Démontrer que sa limite est unique.

Les exotiques et les olympiques

Exercice 31.16 (Bolzano-Weierstrass avec vue sur la mer)
Soit u_n une suite réelle. On dit que l'entier n a vue sur la mer si pour tout $p \geq n$, $u_p \leq u_n$. On note A l'ensemble des entiers qui ont vue sur la mer.
1) Montrer que, si A est infini, il existe une suite extraite de u_n décroissante.
2) Montrer que, si A est fini, il existe une suite extraite de u_n croissante.
3) Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 31.17 Pour toute suite u_1, u_2, ..., u_n, ... de nombres réels, on considère la moyenne de ses n premiers termes $v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$.
1) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
2) En déduire le *théorème de la moyenne de Césaro : si la suite u_n converge vers ℓ, alors v_n converge vers ℓ.*

Exercice 31.18 (Moyenne arithmético-géométrique de Gauss)
Soient a et b deux nombres réels avec $0 < a \leq b$. On définit les suites a_n et b_n par $a_0 = a$, $b_0 = b$, et les relations de récurrence

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\ ,\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Démontrer que $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Démontrer que les suites a_n et b_n sont adjacentes. Leur limite commune $M(a,b)$ s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b.
3) Calculer $M(1,2)$ avec 7 décimales exactes.

$u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + (2u_{n-2} + \cdots + 2u_1 + 2u_0)$
$u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + (u_n - u_{n-1}) = 2u_n + u_{n-1}$.
La suite u_n est donc récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r - 1 = 0$.
En utilisant $u_0 = 1 = u_1$, on obtient $u_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, .

Exercice 30.19 L'équation caractéristique admet une seule racine $r = 2$. Donc u_n est de la forme $2^n(\lambda + \mu n)$. Puisque $u_0 = u_1 = 1$, on obtient $u_n = (2-n)\, 2^{n-1}$.
Pour obtenir la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$, il suffit d'utiliser la relation de récurrence $u_{k+2} = 4u_{k+1} - 4u_k$, qui donne $\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+2} = 4\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - 4\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.
En effectuant les changements d'indices $j = k+2$ dans la première somme et $i = k+1$ dans la deuxième, il vient $\sum_{j=2}^{n+1} u_j = 4\sum_{i=1}^{n} u_i - 4\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.
Donc $S_n - u_0 - u_1 + u_n + u_{n+1} = 4(S_n - u_0 + u_n) - 4S_n$. Ainsi

$$\begin{aligned} S_n &= -3u_0 + u_1 + 3u_n - u_{n+1} \\ &= -3 + 1 + 3(2-n)\,2^{n-1} - (2-n-1)\,2^n = (4-n)\,2^{n-1} - 2. \end{aligned}$$

Exercice 30.20 La formule (30.10) s'écrit $F_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right]$.
En utilisant la formule du binôme de Newton, il vient

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{5}\right)^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\sqrt{5}\right)^k\right] \\ &= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-(-1)^k)\left(\sqrt{5}\right)^k\right]. \end{aligned}$$

Or lorsque k est pair, $1-(-1)^k$ est nul. Donc dans la somme ci-dessus ne subsistent que les termes où k est impair, c'est-à-dire tels que $k = 2p+1$, où p est entier. Puisque $0 \le k \le n$, on a $0 \le p \le \frac{n-1}{2}$ et

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\sum_{p=0}^{(n-1)/2} 2\binom{n}{2p+1}\left(\sqrt{5}\right)^{2p+1}\right] \\ &= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\sum_{p=0}^{(n-1)/2} 2\sqrt{5}\binom{n}{2p+1}\left(\sqrt{5}\right)^{2p}\right] = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\sum_{p=0}^{(n-1)/2}\binom{n}{2p+1}5^p\right]. \end{aligned}$$

Solutions des exercices du chapitre 31

Exercice 31.1 1) On a $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \sqrt{2x}$.
a) Démontrons par récurrence que u_n est croissante, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \ge u_n$.
La propriété est vraie pour $n = 0$. En effet, $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \sqrt{2u_0} = 1 \ge u_0$.
Hérédité : l'hypothèse de récurrence est $u_{n+1} \ge u_n$. On en déduit $2u_{n+1} \ge 2u_n$ et $\sqrt{2u_{n+1}} \ge \sqrt{2u_n}$, c'est-à-dire $u_{n+2} \ge u_{n+1}$. Donc la propriété est héréditaire et on a démontré par récurrence que u_n est croissante.
b) Montrons par récurrence que u_n est majorée par 2, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le 2$. La propriété est vraie pour $n = 0$. En effet $u_0 = \frac{1}{2} \le 2$.
Hérédité : l'hypothèse de récurrence est $u_n \le 2$. Alors $2u_n \le 4$, d'où $\sqrt{2u_n} \le \sqrt{4}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \le 2$, c.q.f.d.
c) La suite u_n est croissante et majorée par 2 ; elle est donc convergente (théorème des suites monotones) et sa limite l vérifie $l \le 2$.
d) En passant à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$, il vient $l = \sqrt{2l}$. En élevant au carré, on voit que l vérifie $l^2 - 2l = 0$, c'est-à-dire $l(l-2) = 0$.

Donc $l = 0$ ou $l = 2$. Puisque $u_0 = \frac{1}{2}$ et u_n est croissante, $l = 0$ est impossible. Ainsi $l = \lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.
2) Le graphe de $y = \sqrt{2x}$ est une demi-parabole d'axe horizontal car $y = \sqrt{2x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y^2$ et $y \geq 0$ (voir exercice 7.5 pour détails). L'utilisation de la première bissectrice et du graphe de $f(x) = \sqrt{2x}$ permet d'obtenir géométriquement les premiers termes de la suite u_n et de vérifier ainsi que u_n croît et converge vers 2 (figure 31.10).

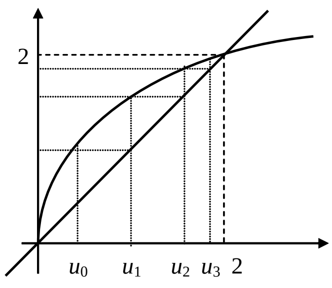

Figure 31.10

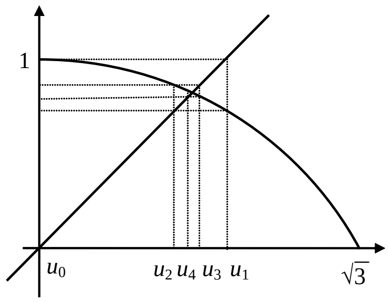

Figure 31.11

Exercice 31.2 On a $u_{n+1} - 5 = -\frac{1}{5}u_n + 1 = -\frac{1}{5}(u_n - 5)$, c'est-à-dire $v_{n+1} = -\frac{1}{5}v_n$. La suite v_n est donc géométrique de raison $q = -\frac{1}{5}$. Puisque $|q| < 1$, la suite géométrique v_n est convergente et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ en vertu du théorème 31.1. Donc u_n est convergente car $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(v_n + 5) = 5$.

Exercice 31.3 Montrons d'abord que la suite u_n.est croissante :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n.$$

Montrons ensuite que v_n est décroissante :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}.$$

Pour étudier le signe de $v_{n+1} - v_n$, on réduit au même dénominateur. Puisque $(n+1)! = (n+1)\,n!$, le dénominateur commun le plus simple est $n(n+1)(n+1)!$, et on obtient

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} + \frac{n}{n(n+1)(n+1)!} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0.$$

Donc $v_{n+1} \leq v_n$, ce qui prouve que v_n est décroissante.
Enfin, $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n.n!} = 0$. Donc les suites u_n et v_n sont adjacentes. Elles convergent vers la même limite L et $u_n \leq L \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 31.4 1) On a $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$. Puisque $f(x) > 0$ pour tout x réel, on a $u_n = f(u_{n-1}) > 0$ pour tout $n \geq 1$. Comme de plus $u_0 > 0$, on en déduit que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Démontrons maintenant par récurrence que u_n est croissante, c'est-à-dire démontrons par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La propriété est vraie pour $n = 0$ car $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{4}u_0^2 + 1 = \frac{5}{4}$.
Supposons maintenant que, pour un entier n donné, $u_{n+1} \geq u_n$. Puisque u_n et u_{n+1} sont positifs, on a $u_{n+1}^2 \geq u_n^2$, d'où $\frac{1}{4}u_{n+1}^2 \geq \frac{1}{4}u_n^2$, ou encore $\frac{1}{4}u_{n+1}^2 + 1 \geq \frac{1}{4}u_n^2 + 1$. Ainsi $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ et la propriété est héréditaire, c.q.f.d.

3) Montrons par récurrence que $u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La propriété est vraie pour $n = 0$ car $u_0 = 1$. Supposons que, pour un entier n donné, $u_n \leq 2$. Alors $\frac{1}{4}u_n^2 \leq 1$, d'où $u_{n+1} \leq 2$. La propriété est héréditaire, elle est donc démontrée par récurrence. Puisque la suite u_n est croissante et majorée par 2, elle admet une limite $l \leq 2$ en vertu du théorème des suites monotones.
4) En passant à la limite dans la relation de récurrence, il vient

$$l = \frac{1}{4}l^2 + 1 \Leftrightarrow l^2 - 4l + 4 = 0 \Leftrightarrow (l-2)^2 = 0 \Leftrightarrow l = 2.$$

Donc la suite u_n est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.
4) Si $u_0 = 3$, on a $u_1 = \frac{13}{4} > 3$. Donc $u_1 > u_0$ et la même démonstration qu'à la question 2 montre que u_n est croissante. Si u_n était majorée, elle serait convergente (théorème des suites monotones). Or on a vu en question 3 que la seule limite possible est 2. Donc, si u_n était majorée, elle convergerait vers 2. Or ceci est impossible car $u_0 = 3$ et u_n est croissante. Donc u_n n'est pas majorée. Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 31.5 1) La représentation graphique de $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1$ est une parabole. On remarque que f est décroissante sur $\left[0, \sqrt{3}\right]$ car $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$. L'étude graphique de u_n (figure 31.11) semble montrer que u_n est convergente et que sa limite est l'abscisse du point d'intersection de la courbe $y = f(x)$ et de la première bissectrice $y = x$.
2) Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = -\frac{1}{3}u_{n-1}^2 + 1$, donc $u_n \leq 1$ pour $n \geq 1$. Comme $u_0 = 0$, on a $u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui démontre la partie droite de l'encadrement. Pour $n \geq 1$, on a donc $u_{n-1} \leq 1$, donc $u_{n-1}^2 \leq 1$, donc $-\frac{1}{3}u_{n-1}^2 \geq -\frac{1}{3}$. Ainsi $u_n = -\frac{1}{3}u_{n-1}^2 + 1 \geq \frac{2}{3} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. Comme $u_0 = 0$, on a bien $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Finalement donc $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) a) Montrons d'abord que la suite des termes d'indices pairs $v_n = u_{2n}$ est croissante. Pour cela, on démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \geq v_n$. La propriété est vraie pour $n = 0$. En effet, $v_0 = u_0 = 0$, $v_1 = u_2 = -\frac{1}{3}u_1 + 1 = \frac{2}{3}$. Donc $v_1 \geq v_0$. Supposons que $v_{n+1} \geq v_n$. Alors $u_{2n+2} \geq u_{2n}$ et, puisque f est décroissante, $f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n})$, c'est-à-dire $u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$. En appliquant une nouvelle fois f, il vient $f(u_{2n+3}) \geq f(u_{2n+1})$, c'est-à-dire $u_{2n+4} \geq u_{2n+2}$, ou encore $v_{n+2} \geq v_{n+1}$. La propriété est héréditaire, C.q.f.d.
b) Montrons de même que la suite $w_n = u_{2n+1}$ est décroissante. Pour cela, on démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} \leq w_n$. La propriété est vraie pour $n = 0$: en effet, $w_0 = u_1 = 1$, $w_1 = u_3 = -\frac{1}{3}u_2^2 + 1 = \frac{23}{27}$. Donc $w_1 \leq w_0$.
Supposons que $w_{n+1} \leq w_n$. Alors $u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$ et, puisque f est décroissante, $f(u_{2n+3}) \geq f(u_{2n+1})$, c'est-à-dire $u_{2n+4} \geq u_{2n+2}$. En appliquant une nouvelle fois f, il vient $f(u_{2n+4}) \leq f(u_{2n+2})$, c'est-à-dire $u_{2n+5} \leq u_{2n+3}$, ou encore $w_{n+2} \leq w_{n+1}$. La propriété est héréditaire, c.q.f.d.
Or $v_n = u_{2n}$, donc $v_n \leq 1$. Ainsi v_n est croissante (question 2) et majorée par 1. Donc v_n est convergente.
De même $w_n = u_{2n+1}$, donc $w_n \geq 0$. Par suite w_n est décroissante (question 2) et minorée par 0. Ainsi w_n est également convergente.
4) Posons $\lim_{n\to+\infty} v_n = L$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n = L'$ (il n'y a pas de raison a priori pour que $L = L'$).
On a $w_{n+1} - v_{n+1} = u_{2n+3} - u_{2n+2} = -\frac{1}{3}\left(u_{2n+2}^2 - u_{2n+1}^2\right) = -\frac{1}{3}\left(v_{n+1}^2 - w_n^2\right)$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette égalité, il vient : $L' - L = -\frac{1}{3}\left(L^2 - L'^2\right)$.
Ou encore : $3(L' - L) = (L' - L)(L' + L)$, c'es-à-dire : $(L' - L)(3 - L - L') = 0$.
Or on a vu (question 3) que $v_n \leq 1$ et $w_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $L \leq 1$ et $L' \leq 1$, et par conséquent $3 - L - L'$ ne peut pas être nul. Par conséquent $L' = L$, ce qui signifie que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n$. Autrement dit, les suites v_n et w_n sont adjacentes (car l'une croît, l'autre décroît, et leur différence tend vers 0).
5) Puisque n tend vers l'infini en étant nécessairement pair ou impair, $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}$ implique que u_n est convergente et que sa limite est la limite commune à $u_{2n} = v_n$ et $u_{2n+1} = w_n$. Notons donc $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient :

$$L = -\frac{1}{3}L^2 + 1 \Leftrightarrow L^2 + 3L - 3 = 0 \Leftrightarrow L = \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \text{ ou } L = L = \frac{-3-\sqrt{21}}{2}.$$

Or $L \geq 0$ car $u_n \geq 0$ pour tout n (question 3). Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$.

Exercice 31.6 On a $u_n = \frac{1}{n^7}\left(1^5 + 2^5 + \cdots + n^5\right)$. Or chacun des termes de cette somme est inférieur ou égal à n, et il y a n termes dans la somme. Donc

$$u_n \leq \frac{1}{n^7}\left(n^5 + n^5 + \cdots + n^5\right) = \frac{1}{n^7} \times n \times n^5 = \frac{1}{n}.$$

Comme par ailleurs u_n est une somme de termes positifs, il vient $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, ce qui prouve que u_n converge vers 0.

Exercice 31.7 1) Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
2) Calculons $u_{n+1} - u_n$ pour en étudier le signe.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

On réduit au même dénominateur pour étudier le signe. Le dénominateur le plus simple est $2(n+1)(2n+1)$ car $2n + 2 = 2(n+1)$. On obtient

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+2}{2(n+1)(2n+1)} + \frac{2n+1}{2(n+1)(2n+1)} - \frac{2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \geq 0.$$

Donc la suite u_n est croissante.
3) On a bien $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$ pour tout $k \geq 0$. Ecrivons cette inégalité successivement pour $k = 1, 2, \cdots, n$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \ , \ \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n} \ , \ \cdots \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n}$$

Par addition de ces n inégalités, on obtient $u_n \leq n \times \frac{1}{n}$, donc $u_n \leq 1$.
Ainsi u_n est croissante (question 2) et majorée par 1. Elle admet donc une limite $l \leq 1$ par le théorème des suites monotones.
4 et 5) Puisque $u_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)$, on voit que u_n s'interprète comme la somme des surfaces des rectangles dans la figure 31.12 [base $\frac{1}{n}$, hauteurs $f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour $k = 1, 2, \cdots, n$].
6) Lorsque $n \to +\infty$, la base de ces rectangles, qui vaut $\frac{1}{n}$, tend vers 0, tandis que leur nombre tend vers $+\infty$. Ils viennent à recouvrir toute la surface située sous la courbe entre les abscisses 0 et 1. Donc $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln|1 + x|]_0^1 = \ln 2$.

Exercice 31.8 On remarque d'abord que u_n et v_n n'existent que pour $n \geq 2$ (car $\sum_{n=1}^{-1}$ et $\sum_{n=1}^{0}$ n'ont pas de sens). Montrons que u_n et v_n sont adjacentes.
Pour tout $n \geq 2$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2} \geq 0$, donc $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante.