FICHE RECAPITULATIVE NOMBRES COMPLEXES

1) Forme algébrique : L'écriture $z = x + iy$ s'appelle la *forme algébrique* du nombre complexe z. Le *conjugué* de $z = x + iy$ est le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$ et

$$\boxed{z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z) \;\;,\;\; z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,(z) \;\;,\;\; z \times \overline{z} = x^2 + y^2} \tag{1}$$

2) Module et argument : Dans le plan complexe, les *coordonnées polaires* r et θ du point M qui représente le complexe $z = x + iy$ définissent le module $r = |z|$ et l'argument $\theta = \arg z$ de z. L'argument est défini à 2π près. On a

$$\boxed{x = r\cos\theta \;\;,\;\; y = r\sin\theta \;\;,\;\; |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \times \overline{z}}} \tag{2}$$

Pour calculer l'argument θ du complexe z, on utilise les formules :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}\,z}{|z|} \;\;,\;\; \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}\,z}{|z|}}$$

Pour obtenir la forme algébrique du quotient $\frac{z}{z'}$, on multiplie numérateur et dénominateur par le **conjugué du dénominateur**. Il apparaît alors au dénominateur le **module** de z'.

3) Exponentielle complexe : Elle est définie par la formule

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \tag{3}$$

L'exponentielle complexe vérifie les propriétés suivantes :

$$\boxed{e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \;\;,\;\; \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \;\;,\;\; \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \;\;,\;\; \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}}$$

La dernière égalité, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, est la *formule de Moivre*. En utilisant (2) et (3), on voit que tout complexe z s'écrit sous **trois formes différentes** (algébrique, trigonométrique, exponentielle) :

$$\boxed{z = x + iy = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}} \tag{4}$$

4) Module et argument d'un produit et d'un quotient : il résulte de (4) et des propriétés de l'exponentielle complexe que

$$\left\{\begin{array}{l} |zz'| = |z|\,.\,|z'| \;\;,\quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \;\;[2\pi] \\ \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} \;\;,\quad \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \;\;[2\pi] \end{array}\right.$$

5) Formules d'Euler : pour tout réel θ, on a :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \;\;,\;\; \sin\theta = \frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}} \tag{5}$$

Elles permettent notamment de linéariser $\sin^3 x$ et $\cos^3 x$ à l'aide de l'identité remarquable

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

6) Utilisation des nombres complexes dans les applications : on utilise les formules

$$\boxed{\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) \;\;,\;\; \sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta})} \tag{6}$$

Celles-ci permettent de remplacer certains calculs de trigonométrie par des calculs sur les exponentielles complexes, notamment dans les équations différentielles.