Chapitre 23

Suites convergentes

Les suites convergentes sont l'outil de base de l'analyse numérique, qui fournit des solutions numériques aux problèmes que l'on rencontre dans les applications (Chapitre 34). Elles interviennent également dans la définition des séries (Chapitre 31). Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :
A. Savoir ce qu'est une suite convergente.
B. Savoir sous quelle condition une suite géométrique est convergente.
C. Connaître et savoir utiliser le théorème des suites monotones.
D. Connaître et savoir utiliser les suites adjacentes.

23.1 Qu'est-ce qu'une suite convergente ?

De manière intuitive, on dit que la suite u_n de nombres réels ou complexes est *convergente* si elle a une *limite finie* lorsque n tend vers $+\infty$. Nous donnons quatre exemples de suites de nombres réels qui illustrent cette notion, dont nous préciserons ensuite la définition mathématique.

23.1.1 Exemples de suites de nombres réels convergentes

Exemple 23.1 Soit la suite u_n définie par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{23.1}$$

On peut *visualiser* facilement la convergence (ou la divergence) de la suite u_n, car on observe que $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$. La représentation graphique de $y = f(x)$ est une droite (figure 23.1). On trace également sur le graphique la première bissectrice, d'équation $y = x$. Partant de u_0 en abscisse, on remonte jusqu'à $y = f(x)$, et on obtient en ordonnée $u_1 = f(u_0)$. Le point de la première bissectrice d'ordonnée u_1 a aussi pour abscisse u_1, ce qui permet de reporter graphiquement u_1 en abscisse. On peut alors recommencer : puisque $u_2 = f(u_1)$, on obtient u_2 en ordonnée à partir de $y = f(x)$. On reporte u_2 en abscisse grâce à la première bissectrice, etc. On a indiqué sur la figure les valeurs de u_3, u_4, ...

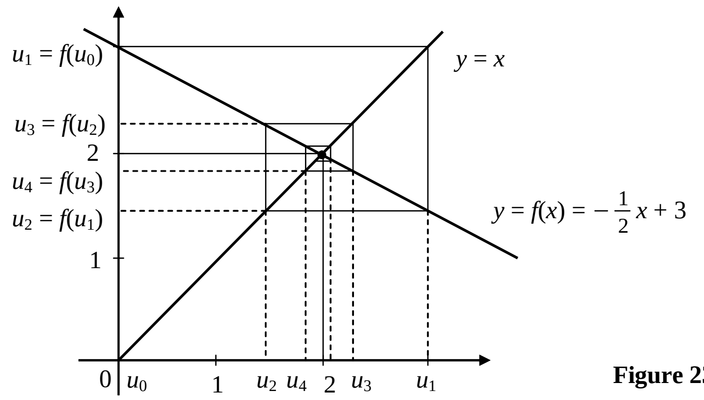

Figure 23.1

Le graphique montre que la suite u_n semble converger vers l'abscisse L du point d'intersection de la droite $y = x$ et de la droite $y = f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$. On obtient la valeur de L en résolvant l'équation $x = -\frac{1}{2}x + 3$, qui a pour solution $x = 2$. La figure 23.1 indique donc que la suite u_n converge vers $L = 2$. Nous donnerons une démonstration rigoureuse de ce résultat dans la section suivante. Le graphique de la figure 23.1, qui ressemble à une toile d'araignée, est parfois nommé *cobweb*.

On peut visualiser d'une autre manière la convergence de u_n vers 2 : il suffit pour cela de calculer, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, les valeurs numériques successives de u_n (ci-dessous par exemple pour $n = 0$ jusqu'à 19 avec 4 décimales après la virgule) :

n	u_n
0	0,0000
1	3,0000
2	1,5000
3	2,2500
4	1,8750

n	u_n
5	2,0625
6	1,9688
7	2,0156
8	1,9922
9	2,0039

n	u_n
10	1,9981
11	2,0010
12	1,9995
13	2,0002
14	1,9999

n	u_n
15	2,0001
16	2,0000
17	2,0000
18	2,0000
19	2,0000

On voit les valeurs numériques de u_n se "rapprocher" de 2.

Exemple 23.2 Soit la suite v_n définie par son premier terme $v_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \frac{v_n^3 + 1}{3}. \tag{23.2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme pour la suite u_n de l'exemple précédent, on peut effectuer une étude graphique du comportement de v_n à l'aide de la première bissectrice et du graphe de la fonction $g(x) = \frac{x^3+1}{3}$ (Figure 23.2). On observe que la suite v_n semble converger, en décroissant, vers l'abscisse L du point d'intersection de la première bissectrice et du graphe de g.

La limite L de la suite v_n vérifie donc $L = \frac{L^3+1}{3} \Leftrightarrow L^3 - 3L + 1 = 0$. Ici, contrairement à l'exemple précédent, nous ne savons pas résoudre l'équation et trouver la valeur exacte de L. Mais en fait, nous allons prendre le problème à l'envers, et utiliser la suite v_n pour obtenir une valeur numérique d'une solution de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$.

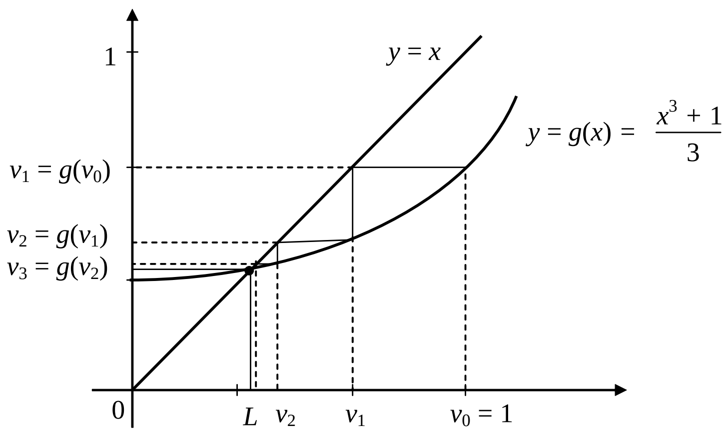

Figure 23.2

Si nous calculons, au moyen d'une calculatrice ou d'un tableur, les premières valeurs de la suite v_n avec 7 décimales après la virgule par exemple, nous obtenons

n	v_n
0	1,0000000
1	0,6666667
2	0,4320988
3	0,3602256
4	0,3489146

n	v_n
5	0,3474924
6	0,3473200
7	0,3472992
8	0,3472967
9	0,3472964

n	v_n
10	0,3472964
11	0,3472964
12	0,3472964
13	0,3472964
14	0,3472964

Le tableau ci-dessus nous permet d'écrire que $L \approx 0,3472964...$ Ainsi, *l'utilisation de la suite v_n nous a permis de trouver une valeur numérique approchée d'une solution de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$.*

Exemple 23.3 Nous considérons maintenant une suite d'une nature différente, définie pour $n \geq 1$ comme une *somme* :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}. \tag{23.3}$$

On peut visualiser les termes successifs de cette suite grâce à la figure 23.3.

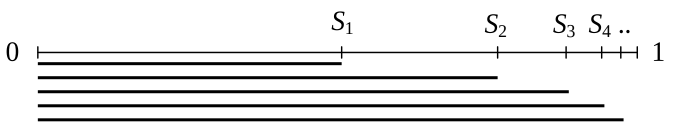

Figure 23.3

Partons d'un segment de longueur 1 et partageons-le en 2 parties égales : à gauche, nous avons donc une longueur $\frac{1}{2}$. Partageons la partie droite en 2 parties égales : chacune d'elles a une longueur $\frac{1}{4}$, et nous ajoutons la partie gauche à $\frac{1}{2}$ pour obtenir $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. On procède ainsi en divisant en 2 la partie restante pour construire S_3, $S_4, \ldots$ Le graphique montre que la suite S_n converge vers 1 et qu'elle est croissante.

Exemple 23.4 Soit la suite T_n définie pour $n \geq 0$ par

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}. \tag{23.4}$$

Pour visualiser la convergence de cette suite, nous n'avons à notre disposition aucun procédé géométrique, contrairement aux exemples précédents.

Toutefois, si nous calculons numériquement les premiers termes, nous obtenons le tableau ci-dessous. Ainsi, avec 7 décimales après la virgule, la suite T_n semble converger vers la valeur numérique 2,7182818.

n	T_n
0	$1,0000000$
1	$2,0000000$
2	$2,5000000$
3	$2,6666667$

n	T_n
4	$2,7083333$
5	$2,7166667$
6	$2,7180556$
7	$2,7182540$

n	T_n
8	$2,7182788$
9	$2,7182815$
10	$2,7182818$
11	$2,7182818$

On reconnaît ici les premières décimales du nombre e, base du logarithme népérien. En fait, la suite T_n définie par (23.4) converge vers e (Formule (31.17)) et constitue le moyen le plus simple d'obtenir la valeur numérique de e.

23.1.2 Définition mathématique d'une suite convergente

Dans beaucoup d'applications, la notion intuitive de limite utilisée jusqu'à présent suffit. Pourtant, pour aller plus loin, il est nécessaire de *formaliser* cette notion et d'en donner une *définition mathématique précise*.

Nous commençons par les suites de nombres réels.

Définition 23.1 *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite de nombres réels u_n* converge *vers ℓ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On note alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et on dit que u_n est convergente. On dit que la suite* diverge *si elle ne converge vers aucun réel.*

La convergence vers ℓ d'une suite de nombres réels peut s'énoncer ainsi : étant donné $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe un rang N à partir duquel $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$. La figure 23.4 montre comment la définition ci-dessus traduit la notion intuitive de limite : la suite u_n "se rapproche" de ℓ.

Ce qu'il faut bien comprendre dans cette définition, c'est que ε peut être rendu aussi petit que l'on veut. C'est l'utilisateur qui fixe le epsilon, et qui détermine le N à partir duquel on a $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$. Par exemple, le tableau des valeurs de la suite u_n (exemple 23.1) montre que si nous prenons $\varepsilon = 5.10^{-5}$, alors on a $2-\varepsilon \leq u_n \leq 2+\varepsilon$ dès lors que $N \geq 16$, puisque l'arrondi à la quatrième décimale se fait "au plus proche", c'est-à-dire au chiffre supérieur si la cinquième décimale est 5, 6, 7, 8 ou 9, et au chiffre inférieur si la cinquième décimale est 0, 1, 2, 3, 4. Obtenir numériquement $\ell = 2,0000$ signifie donc que $1,99995 \leq u_n < 2,00005$.

Naturellement, pour avoir $\varepsilon = 5.10^{-6}$ par exemple, c'est-à-dire avoir 5 décimales exactes au lieu de 4, il faudrait prendre N plus grand et effectuer les calculs avec 6 décimales au moins.

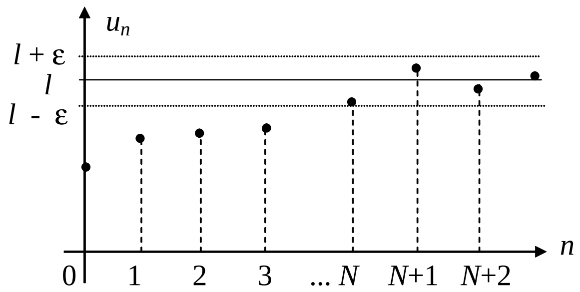

Figure 23.4

Dans le cas d'une suite u_n de nombres complexes, on dit de même que u_n *converge* vers $\ell \in \mathbb{C}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Ceci s'interprète en disant que, étant donné $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe un rang N à partir duquel tous les u_n se situent à l'intérieur du disque de centre ℓ de rayon ε dans le plan complexe. En effet, $|u_n - \ell|$ est la distance entre u_n et ℓ dans le plan complexe.

Il est clair que la suite complexe u_n converge vers ℓ dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les suites réelles $\operatorname{Re} u_n$ et $\operatorname{Im} u_n$ convergent respectivement vers $\operatorname{Re} \ell$ et $\operatorname{Im} \ell$.

23.1.3 Suites divergentes

La définition d'une suite de nombres réels convergente exprime que la suite u_n *a une limite*, et que celle-ci est un nombre réel ℓ, c'est-à-dire que cette limite est *finie*. Nous aurons donc deux types de suites réelles divergentes : les suites qui ont une limite infinie et celles qui n'ont pas de limite.

Définition 23.2 *On dit que la suite réelle u_n tend vers $+\infty$ ou* diverge *vers $+\infty$, et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A.$$

Autrement dit, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, aussi grands que l'on veut. La figure 23.5 (page suivante) schématise cette situation.

Définition 23.3 *On dit que la suite réelle u_n tend vers $-\infty$ si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Longrightarrow u_n \leq A$.*

Ceci revient à dire que la suite $-u_n$ tend vers $+\infty$.

Donnons enfin un exemple de suite réelle qui n'a pas de limite. Cet exemple est basé sur le résultat suivant : *si une suite converge, sa limite ℓ est unique*. Ce résultat peut se démontrer à partir de la définition (voir Exercice 23.15).

Exemple 23.5 La suite définie par $u_n = \cos\left(\dfrac{n^2-1}{n}\pi\right)$ diverge.
En effet $u_{2p} = \cos\left(\frac{4p^2-1}{2p}\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2p} + 2p\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2p}$ et

$$u_{2p+1} = \cos\left(\frac{4p^2+4p}{2p+1}\pi\right) = \cos\left(\frac{2p\,(2p+1)+2p}{2p+1}\pi\right) = \cos\left(\frac{2p}{2p+1}\pi\right).$$

Par conséquent $\lim_{p\to+\infty} u_{2p} = \cos 0 = 1$ et $\lim_{p\to+\infty} u_{2p} = \cos\pi = -1$. Les suites de rang pair et impair convergent vers des limites différentes. Donc la suite u_n diverge.

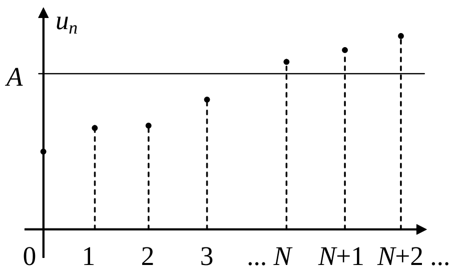

Figure 23.5

On voit de même qu'une suite u_n de nombres complexes diverge dans deux cas :
- La suite u_n n'a pas de limite.
- La suite $|u_n|$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
Cela revient à dire qu'au moins une des deux suites réelles $\operatorname{Re} u_n$ et $\operatorname{Im} u_n$ diverge.

23.2 Convergence d'une suite géométrique

On sait (Section 22.2) que les suites géométriques sont liées aux fonctions exponentielles. En effet, l'expression $u_n = u_0 q^n$ fait intervenir la fonction exponentielle de base q lorsque q est un réel positif. En exploitant cette idée, on obtient l'important résultat suivant.

Théorème 23.1 *Soit* u_n *une suite géométrique de raison* $q \in \mathbb{C}$ avec $u_0 \neq 0$. *Alors :*
a) *Si* $|q| < 1$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
b) *Si* $|q| > 1$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.

Démonstration On a $u_n = u_0 q^n$, donc $|u_n| = |u_0| \times |q|^n = |u_0| \times e^{n\ln|q|}$.
a) Si $|q| < 1$, $\ln|q| < 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} n\ln|q| = -\infty$.
Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln|q|} = 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
b) Si $|q| > 1$, $\ln|q| > 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} n\ln|q| = +\infty$.
Il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln|q|} = +\infty$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.

Exemple 23.6 Reprenons l'exemple 23.1 de la suite u_n définie par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$. Nous avons observé sur la figure 23.1 que la suite u_n semble converger vers 2. Nous allons *démontrer* ici ce résultat, en observant que la suite u_n vérifie une relation de récurrence de la forme

$u_{n+1} = qu_n + r$, avec $q = -\frac{1}{2}$, $r = 3$ et $u_0 = 0$. Il s'agit donc d'*une suite arithmético-géométrique*, dont on sait trouver l'expression explicite (Exercice 22.9). On a ainsi

$$u_n = \left(u_0 - \frac{r}{1-q}\right) q^n + \frac{r}{1-q} = 2\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, car c'est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$, et ainsi $|q| < 1$. On en déduit bien que u_n est convergente et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Exemple 23.7 Considérons la suite S_n définie pour $n \geq 1$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Ici aussi (Exemple 23.3), un graphique nous a permis d'observer que S_n semble converger vers 1. Nous allons *démontrer* ce résultat en calculant explicitement S_n en fonction de n. On a d'abord

$$S_n = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Or la parenthèse est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. Donc, par le Théorème 22.4,

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, car il s'agit d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, et $|q| < 1$. Ainsi u_n est bien convergente, et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Remarque 23.1 Pour la plupart des suites utilisées dans les applications, il n'est pas possible, contrairement aux deux exemples précédents, de calculer explicitement u_n en fonction de n. Il est cependant possible de donner des *critères* permettant de savoir, a priori, si une suite converge ou non, ce qui permet ensuite de mettre en oeuvre un procédé de calcul numérique pour obtenir une valeur approchée de sa limite. Les deux critères les plus simples sont le *théorème des suites monotones* et le *théorème des suites adjacentes*, que nous allons maintenant expliquer.

23.3 Théorème des suites monotones

Définition 23.4 *On dit que la suite réelle u_n est* croissante *si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$. On dit qu'elle est* décroissante *si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$. On dit qu'elle est* monotone *si elle est soit croissante, soit décroissante.*

Définition 23.5 *On dit que la suite réelle u_n est* majorée *s'il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. Le réel M s'appelle alors un* majorant *de la suite u_n. On dit qu'elle est* minorée *s'il existe un réel m tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.*

Le réel m s'appelle alors un minorant *de la suite u_n.*
Une suite réelle majorée et minorée est dite bornée.

Le *théorème des suites monotones* (ou *théorème de la limite monotone*) s'énonce ainsi :

Théorème 23.2 *Toute suite réelle croissante et majorée converge. Toute suite réelle croissante et non majorée diverge vers $+\infty$. De même toute suite réelle décroissante et minorée converge et toute suite réelle décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.*

Donnons une interprétation graphique du théorème des suites monotones dans le cas où u_n est croissante. La figure 23.6 est un exemple de suite croissante est majorée par M. Puisque les termes u_n sont de plus en plus grands mais sont soumis au plafond M, il est clair qu'il doivent finalement tendre vers une "asymptote" de hauteur $L \leq M$. Ainsi la suite u_n converge bien (vers L). On notera qu'il n'y a aucune raison pour que $L = M$, et *le théorème des suites monotones ne donne jamais la valeur de la limite en cas de convergence.*

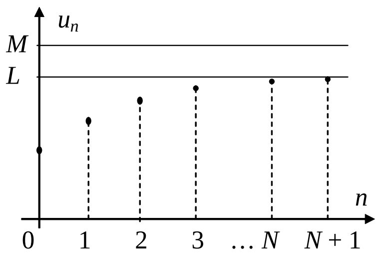

Figure 23.6

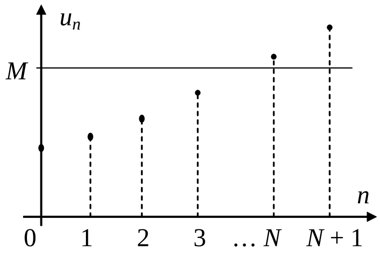

Figure 23.7

De même, la figure 23.7 donne un exemple de suite croissante mais non majorée : cela signifie que, quel que soit le nombre M donné, il existe un $u_N > M$ (puisque M ne peut être un majorant). Alors $u_n \geq M$ pour tout $n \geq N$ car u_n est croissante. Comme M est arbitrairement grand, cela signifie que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Voir l'exemple 30.19 pour la démonstration du théorème des suites monotones.

Exemple 23.8 Reprenons l'exemple de la suite v_n définie par son premier terme $v_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$v_{n+1} = \frac{v_n^3 + 1}{3}$$

(Exemple 23.2). Démontrons d'abord par récurrence que la suite v_n est décroissante (ce qu'on a observé sur la Figure 23.2). Il s'agit donc de démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$.

Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 0$.
En effet $v_1 = \frac{1}{3}\left(v_0^3 + 1\right) = \frac{2}{3}$, donc $v_1 \leq v_0$.

Hérédité : supposons que, pour un n donné, $v_{n+1} \leq v_n$. Alors $v_{n+1}^3 \leq v_n^3$, donc $v_{n+1}^3 + 1 \leq v_n^3 + 1$, et finalement

$$\frac{v_{n+1}^3 + 1}{3} \leq \frac{v_n^3 + 1}{3},$$

c'est-à-dire $v_{n+2} \leq v_{n+1}$. On a donc démontré par récurrence que la suite v_n est décroissante.
Démontrons maintenant, ce qui s'observe également sur le graphique, que la suite v_n est minorée par 0, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$.
Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 0$, car $v_0 = 1 \geq 0$.
Hérédité : supposons que, pour un n donné, on a $v_n \geq 0$. Alors

$$v_{n+1} = \frac{v_n^3 + 1}{3} \geq \frac{1}{3} \geq 0.$$

On a donc démontré par récurrence que la suite v_n est minorée par 0 (en fait, on a même démontré qu'elle était minorée par $\frac{1}{3}$).La suite v_n est donc *décroissante et minorée*. Ainsi elle converge en vertu du théorème des suites monotones. Sa limite s'obtient en *passant à la limite* dans la relation de récurrence $v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(v_n^3 + 1\right)$. En effet, quand $n \to +\infty$, v_n se rapproche indéfiniment de L, et bien entendu il en de même pour v_{n+1}, car $n + 1 \to +\infty$ également. A la limite, on a donc

$$L = \frac{L^3 + 1}{3} \Leftrightarrow L^3 - 3L + 1 = 0.$$

Ainsi L est une solution de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$, qui peut donc être approchée numériquement par les valeurs successives de v_n (voir Exemple 23.2).

Exemple 23.9 Soit u_n définie pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$. Ainsi $u_{n+1} \geq u_n$, et la suite u_n est donc croissante. Montrons qu'elle est majorée. Si $k \geq 2$, on a

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k\,(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

En sommant ces inégalités pour $k = 2$, 3, ..., n, il vient

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

Or la dernière somme est télescopique (Exemple 22.12) et vaut $1 - \frac{1}{n}$. Pour tout $n \geq 2$, on a donc

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 2.$$

Ainsi u_n est croissante et majorée par 2. Donc elle converge d'après le théorème des suites monotones. *On notera que sa limite n'est pas égale à* 2. On peut en effet montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$ (Formule 32.6).

23.4 Théorème des suites adjacentes

Le second théorème d'existence de limite est le théorème des suites adjacentes. Avant de l'établir, précisons ce que sont des suites adjacentes.

Définition 23.6 *On dit que les suites réelles u_n et v_n sont* adjacentes *si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si* $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Exemple 23.10 Soient $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$.
Dans l'exemple 23.9, on a montré que (u_n) est croissante.
Montrons que (v_n) est décroissante. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{(n+1)^2 n} = -\frac{1}{(n+1)^2 n}. \end{aligned}$$

Ainsi $v_{n+1} - v_n \leq 0$, donc (v_n) est décroissante. Enfin $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Ces deux suites sont donc adjacentes.

Théorème 23.3 (Théorème des suites adjacentes) *Si les suites u_n et v_n sont adjacentes, alors elles convergent toutes les deux vers la même limite.*

Le théorème des suites adjacentes est schématisé par la figure ci-dessous :

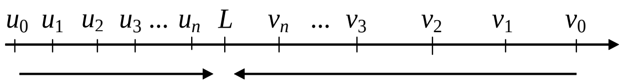

Figure 23.8

Démonstration Supposons que u_n est croissante et v_n décroissante ; alors la suite $\varepsilon_n = v_n - u_n$ est décroissante. En effet $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et $v_{n+1} - v_n \leq 0$, donc $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0$. En outre ε_n converge vers 0, puisque u_n et v_n sont adjacentes. Cela impose à la suite ε_n d'être positive. En effet, si pour un certain rang n_0 on a $\varepsilon_{n_0} < 0$, alors pour $n \geq n_0$ on aura $\varepsilon_n \leq \varepsilon_{n_0} < 0$ car ε_n décroît ; par passage à la limite il vient $0 = \lim \varepsilon_n \leq \varepsilon_{n_0} < 0$, ce qui est absurde. On peut donc affirmer, en utilisant les monotonies, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. La suite u_n est donc croissante et majorée par v_0. Elle converge d'après le théorème des suites monotones. De même v_n converge en tant que suite décroissante et minorée par u_0. Enfin puisque $\varepsilon_n = v_n - u_n$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, les limites de u_n et v_n sont identiques.

Remarque 23.2 Sous les hypothèses de la démonstration, notons ℓ la limite commune aux deux suites u_n et v_n. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \ell \leq v_n \tag{23.5}$$

En d'autres termes u_n est une valeur approchée *par défaut* de ℓ à ε_n près et v_n est une valeur approchée *par excès* de ℓ à ε_n près.

Exemple 23.11 Soient les suites u_n et v_n de l'exemple 23.10. Ces deux suites sont adjacentes et convergent donc vers la même limite ℓ. Ici $\varepsilon_n = v_n - u_n = \frac{1}{n}$. Donc u_n est une valeur approchée par défaut de ℓ à $\frac{1}{n}$ près. Pour avoir une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près, il suffit de prendre $n = 100$. La convergence de u_n et v_n vers ℓ est donc d'ordre $\frac{1}{n}$.

23.5 Suites extraites

Définition 23.7 *Soit u_n une suite de nombres réels ou complexes. Une suite* extraite *de u_n est une suite de la forme u_{n_1}, u_{n_2}, ..., u_{n_p}, ..., où $n_1 < n_2 < \ldots < n_p <$ ... est une suite strictement croissante d'entiers naturels.*

Les exemples les plus simples de suites extraites sont la suite des termes de rang pair u_{2p} et la suite des termes de rang impair u_{2p+1} (voir exemple 23.5). Un exemple plus exotique est donné par la suite u_2, u_3, u_5, ..., u_p, ... des termes correspondant aux indices qui sont des nombres premiers.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass s'énonce ainsi :

Théorème 23.4 *De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente. Autrement dit, si $a \leq u_n \leq b$ pour tout entier n, alors il existe un réel ℓ et une sous-suite u_{n_p} tels que $\lim_{p\to\infty} u_{n_p} = \ell \in [a, b]$.*

Démonstration Voir exercice 23.16.

Exercices

Les basiques

Exercice 23.1 (A,C) Soit u_n définie par son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.
1) Démontrer par récurrence que u_n est croissante et majorée par 2. Conclusion ? Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
2) Représenter graphiquement $f(x) = \sqrt{2x}$ sur $[0, +\infty[$. Utiliser ce graphique pour vérifier les résultats précédents.

Exercice 23.2 (A,B) Soit u_n définie par son premier terme $u_0 = 7$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -\frac{1}{5}u_n + 6$. Démontrer que la suite $v_n = u_n - 5$ est une suite géométrique. En déduire que u_n est convergente et trouver sa limite.

Exercice 23.3 (D) On pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

Démontrer que u_n et v_n sont adjacentes.

Exercice 23.4 (A,C) Soit u_n définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2 + 1$.

1) Démontrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Démontrer par récurrence que u_n est croissante.
3) Démontrer par récurrence que u_n est majorée par 2. Qu'en conclut-on ?
4) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
5) Que se passe-t-il si la suite u_n vérifie la même relation de récurrence, mais avec un premier terme $u_0 = 3$?

Exercice 23.5 (A,C,D) Soit u_n définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n^2 + 1$.
1) Etudier u_n sur un graphique. Que remarque-t-on ?
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le 1$.
3) On considère les suites extraites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Démontrer par récurrence que v_n est croissante et w_n est décroissante.
En déduire que v_n et w_n sont convergentes.
4) Montrer que v_n et w_n ont la même limite. Que peut-on dire de v_n et w_n ?
5) En déduire que la suite u_n est convergente et calculer sa limite.

Exercice 23.6 (A) Soit $u_n = \frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n} k^5$. Démontrer que $0 \le u_n \le \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que u_n est convergente et trouver sa limite.

Exercice 23.7 (A,C) Soit $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} \quad (n \ge 1)$.
1) Ecrire u_n grâce au signe $\sum$.
2) Démontrer que u_n est croissante.
3) En observant que $\frac{1}{n+k} \le \frac{1}{n}$ pour tout $k \ge 0$, démontrer que $u_n \le 1$ pour tout $n \ge 1$. Conclusion ?
4) Représenter graphiquement la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $[0,1]$.
5) En remarquant que

$$u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+1},$$

interpréter u_n comme une somme de surfaces de rectangles sur le graphique précédent.
6) Que deviennent ces rectangles lorsque $n \to +\infty$? En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 23.8 (D) Soient $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$.
Montrer que u_n et v_n sont convergentes.

Exercice 23.9 (D) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que les suites extraites $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$ sont adjacentes. En déduire la convergence de S_n.

Exercice 23.10 (C,D) Cet exercice présente, sous une forme modernisée, un procédé de calcul de $\sqrt{2}$ figurant sur une tablette d'argile provenant des fouilles de Babylone. La suite u_n est définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u_n} + u_n\right) = f(u_n).$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 sous forme de fractions.
2) Démontrer par récurrence que $u_n \ge 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$.
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{2}$.
4) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n. En déduire que la suite u_n est décroissante.
5) Démontrer que la suite u_n est convergente et calculer sa limite.
6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{2}{u_n}$. Démontrer que u_n et v_n sont adjacentes.
7) Déduire de ce qui précède un encadrement de $\sqrt{2}$, permettant d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ avec quatre décimales exactes.

Les techniques

Exercice 23.11 Soient u_n et v_n définies pour $n \geq 2$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

1) Montrer la double inégalité (I) : pour tout $x \geq 0$, $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2) Montrer que les suites u_n et v_n sont adjacentes. Leur limite commune s'appelle la *constante d'Euler* et se note γ. Comment peut-on calculer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près ?
3) Interpréter u_n à l'aide d'une somme de surfaces et de la représentation graphique de $y = \frac{1}{x}$.

Exercice 23.12 Soit la suite $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$.
1) Montrer que u_n est bornée.
2) Montrer que u_n est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 23.13 On définit u_n par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
Etudier la convergence de cette suite.

Exercice 23.14 Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'équation $x^n + x - 1 = 0 \ \ (E_n)$, où l'inconnue x est recherchée dans $]0, +\infty[$.
1) Résoudre l'équation (E_n) pour $n = 1$ et $n = 2$.
2) Etudier les variations de la fonction $x \to x^n + x - 1$ sur $[0, +\infty[$ pour $n \geq 1$. En déduire que l'équation (E_n) admet une et une seule racine positive qu'on notera x_n et montrer que $0 < x_n < 1$ pour tout $n \geq 1$.
3) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$$

et prouver que f est strictement croissante sur D.
4) Montrer que $f(x_n) = n$ pour tout $n \geq 1$.
5) Prouver que la suite x_n est strictement croissante.
6) En déduire la convergence de la suite x_n vers un nombre réel L, et préciser la valeur de L.

Exercice 23.15 Soit u_n une suite convergente de nombres réels ou complexes. Démontrer que sa limite est unique.

Les exotiques et les olympiques

Exercice 23.16 (Bolzano-Weierstrass avec vue sur la mer)
Soit u_n une suite réelle. On dit que l'entier n a vue sur la mer si pour tout $p \geq n$, $u_p \leq u_n$. On note A l'ensemble des entiers qui ont vue sur la mer.
1) Montrer que, si A est infini, il existe une suite extraite de u_n décroissante.
2) Montrer que, si A est fini, il existe une suite extraite de u_n croissante.
3) Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 23.17 Pour toute suite u_1, u_2, ..., u_n, ... de nombres réels, on considère la moyenne de ses n premiers termes

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
2) En déduire le *théorème de la moyenne de Césaro* : *si la suite u_n converge vers ℓ, alors v_n converge vers ℓ.*

Exercice 23.18 (Moyenne arithmético-géométrique de Gauss)
Soient a et b deux nombres réels avec $0 < a \leq b$. On définit les suites a_n et b_n par $a_0 = a$, $b_0 = b$, et les relations de récurrence

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Démontrer que $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Démontrer que les suites a_n et b_n sont adjacentes. Leur limite commune $M(a, b)$ s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b.
3) Calculer $M(1, 2)$ avec 7 décimales exactes.