LONGUEUR D'UN ARC DE COURBE

Soit un arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ (figure 1). On considère un point M qui se déplace le long de la courbe de A à B, par déplacements infinitésimaux $\overrightarrow{dM}$.

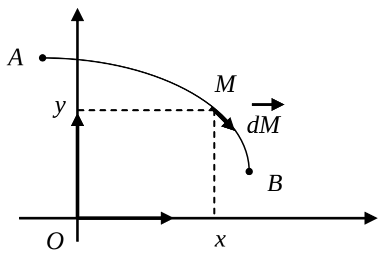

Figure 1

Chacun de ces déplacements a une longueur égale à $\left\|\overrightarrow{dM}\right\|$, et la longueur totale L de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est évidemment la somme de ces longueurs infinitésimales. Donc

$$\boxed{L = \int_A^B \left\|\overrightarrow{dM}\right\|} \tag{1}$$

Si on travaille en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{dM} = dx\,\overrightarrow{i} + dy\,\overrightarrow{j}. \tag{2}$$

Il en résulte immédiatement que

$$\boxed{L = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2}} \tag{3}$$

Exemple : Calculer la longueur de l'arche de cycloïde (TLM1 pages 169-170), définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = R\,(t - \sin t) \\ y = R\,(1 - \cos t) \end{cases} \tag{4}$$

Le déplacement du point $M(x, y)$ est dû à la variation du paramètre t, qui pour une arche de cycloïde varie entre 0 et 2π, comme le montre la figure 2 :

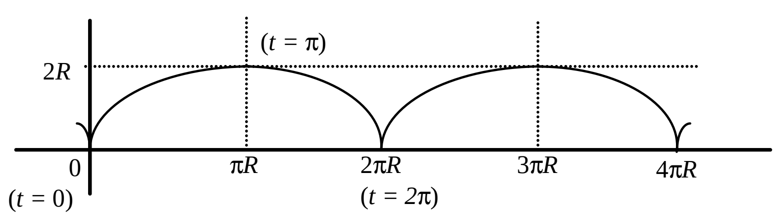

Figure 2 : La cycloïde

Lorsque t varie de dt, x varie de dx et y varie de dy, et on a

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = R\,(1 - \cos t)\,, \quad \frac{dy}{dt} = y'(t) = R \sin t.$$

On en déduit $dx = R\,(1 - \cos t)\,dt$ et $dy = R \sin t dt$. Puisque t croît en variant de 0 à 2π, on a $dt > 0$, donc

$$\left\|\overrightarrow{dM}\right\| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = R\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}dt.$$

En développant et en utilisant la formule $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$, il vient

$$\left\|\overrightarrow{dM}\right\| = R\sqrt{2\left(1-\cos t\right)}dt = 2R\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2R\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt.$$

Puisque t varie entre 0 et 2π, $\dfrac{t}{2}$ varie entre 0 et π et $\sin\dfrac{t}{2} \geq 0$.
On peut donc supprimer la valeur absolue, et la longueur de l'arche de cycloïde vaut

$$L = \int_{t=0}^{t=2\pi}\left\|\overrightarrow{dM}\right\| = 2R\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 4R\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8R.$$

Ce résultat peut s'interpréter de la façon suivante : lorsqu'un cercle de rayon R roule sans glisser sur un plan, la longueur totale parcourue par un point de ce cercle lors d'un tour complet vaut 8 fois le rayon du cercle.

Remarque : Pour le calcul de la longueur d'un arc défini en coordonnées polaires, voir le complément "Courbes en polaires".

EXERCICES

Exercice 1 : On considère la *cardioïde* (TLM1 page 166), d'équation paramétrique

$$x = R\left(2\cos t - \cos 2t\right)\ ;\ y = R\left(2\sin t - \sin 2t\right).$$

Calculer la longueur totale de la courbe (figure 3).

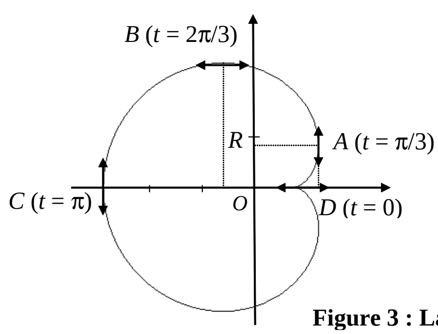

Figure 3 : La cardioïde

Exercice 2 : La *chaînette* est la courbe représentative de la fonction $y = \operatorname{ch} x$ (TLM1 page 161). Calculer la longueur de l'arc de chaînette compris entre les points d'abscisses $-b$ et b, où $b > 0$ (figure 4).

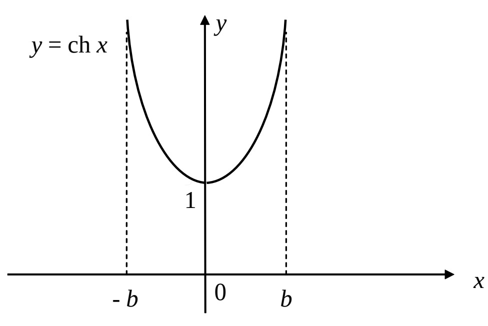

Figure 4

Exercice 3 : Montrer que la longueur de l'arc de parabole $y = \frac{1}{2}x^2$ compris entre O et le point A d'abscisse 1 vaut

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Calculer cette intégrale en intégrant par parties. On rappelle (exercice 17.1 page 210 de TLM1) que

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 1 : Cette longueur vaut $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = 2R\int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin 2t - \sin t)^2 + (\cos t - \cos 2t)^2}\,dt$.
Mais en développant et en utilisant les formules d'addition et de duplication, il vient

$$(\sin 2t - \sin t)^2 + (\cos t - \cos 2t)^2 = 2 - 2\left[\cos 2t \cos t + \sin 2t \sin t\right] = 2 - 2\cos(2t - t) = 2(1-\cos t) = 4\sin^2 \frac{t}{2}.$$

Remplaçons dans l'intégrale. On obtient

$$L = 4R\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}}\,dt = 4R\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 16R.$$

Ce résultat peut s'interpréter ainsi : lorsqu'un cercle de rayon R roule sans glisser sur un autre cercle (fixe) de rayon R, un point quelconque du cercle roulant parcourt une longueur totale de $16R$ lors d'un tour complet. En effet, la cardioïde est l'hypocycloïde à un rebroussement (TLM1 page 171).

Exercice 2 : Dans le cas d'une courbe $y = f(x)$, le paramètre est x car $x = x$ et $y = f(x)$. Alors $x' = 1$ et la formule qui donne la longueur d'un arc de courbe est

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx. \tag{5}$$

Pour la chaînette, $y'(x) = \operatorname{sh} x$, donc

$$L = 2\int_0^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\,dx = 2\int_0^b \operatorname{ch} x\,dx = 2\left[\operatorname{sh} x\right]_0^b = 2\operatorname{sh} b.$$

Exercice 3 : Comme dans l'exercice 2, formule (5),

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Intégrons par parties en posant $u' = 1$, $v = \sqrt{1+x^2}$, de telle sorte que $u = x$ et $v' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Il vient

$$\begin{aligned} L &= \left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\ &= \sqrt{2} - L + \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \sqrt{2} - L + \ln\left(1+\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

On obtient donc finalement

$$L = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$