DETERMINANTS

Le but de ce complément est de proposer une théorie générale des déterminants, permettant notamment de démontrer leurs propriétés à partir d'une définition précise. Celle-ci est basée, dans notre exposé (on peut procéder autrement), sur la notion de *permutation*, introduite dans la section 36.3 de "Toutes les mathématiques" (TLM1).

1 Signature d'une permutation

Nous rappelons les définitions et résultats suivants (voir section 36.3 de TLM1 pour plus de précisions) :

Définition 1 *On appelle* permutation *de* n *éléments toute bijection de* $E_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ *dans lui-même.*

On note $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de n éléments.

Définition 2 *On appelle* transposition *toute permutation de* $\mathcal{S}_n$ *qui intervertit deux éléments de* $E_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, *les autres restant inchangés.*

Théorème 1 *Toute permutation de* n *éléments peut s'obtenir en composant des transpositions. En d'autres termes, pour tout* $\sigma \in \mathcal{S}_n$, *il existe des transpositions* $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_p$ $(p \geq 1)$ *telles que* $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p$.

Démonstration Voir théorème 36.4 de TLM1, page 465.

Il est clair que la décomposition d'une permutation de n éléments en composée de transpositions n'est pas unique. En effet, pour toute transposition τ, on a $\tau \circ \tau = \mathrm{Id}$, donc $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p \circ \tau \circ \tau$. Par contre, on peut démontrer un résultat sur le *nombre de transpositions* qui intervient dans la décomposition. Nous admettons ici ce résultat :

Théorème 2 *Supposons que* $\sigma \in \mathcal{S}_n$ *se décompose en composée de transpositions de deux manières différentes :*

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p = \tau_1' \circ \tau_2' \circ \cdots \circ \tau_m'.$$

Alors $p - m$ *est un nombre* pair.

On déduit du théorème 2 que, si $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p$, le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$ ne dépend pas de la décomposition de σ en composée de transpositions choisie. En effet, si $\sigma = \tau_1' \circ \tau_2' \circ \cdots \circ \tau_m'$, on a $(-1)^p = (-1)^{m+2k} = (-1)^m$. Le nombre $\varepsilon(\sigma)$ s'appelle la *signature* de la permutation σ.

Exemple 1 La signature d'une transposition vaut -1.

Exemple 2 Considérons la permutation circulaire σ de 5 éléments définie par

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

La permutation σ peut s'obtenir par la suite de transpositions suivantes :

1 2 3 4 5	(situation de départ)
5 2 3 4 1	(interversion du 1er et du 5ème éléments)
5 3 2 4 1	(interversion du 2ème et du 3ème éléments)
5 3 1 4 2	(interversion du 3ème et du 5ème éléments)

Sa signature vaut donc $\varepsilon(\sigma_5) = (-1)^3 = -1$.

Théorème 3 *Pour toutes permutations* σ *et* σ' *de* $\mathcal{S}_n$,

$$\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) . \varepsilon(\sigma') \ ; \ \varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) = \varepsilon(\sigma). \tag{2}$$

Démonstration Voir exercice 2.

2 Définition d'un déterminant

Rappelons qu'un déterminant d'ordre n est un *nombre réel ou complexe* se calculant à partir d'un *tableau carré* de nombres réels ou complexes, et que ces nombres se repèrent par un double indice : le premier indice est le numéro de la ligne, le deuxième celui de la colonne. Les nombres du tableau sont encadrés par des barres verticales. Ainsi la notation générale d'un déterminant est

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Nous utiliserons également la notation $\Delta = |a_{ij}|_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq n}$, et considérerons aussi fréquemment Δ comme constitué de n colonnes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, ou de n lignes $L_1, L_2, \ldots, L_n$, et noterons dans ce cas

$$\Delta = \Delta(C_1, C_2, \ldots, C_n) = \Delta(L_1, L_2, \ldots, L_n). \tag{4}$$

Par définition, le déterminant Δ de (3) vaut

$$\Delta = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \tag{5}$$

Montrons comment (4) fonctionne dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

Exemple 3 Le groupe symétrique $\mathcal{S}_2$ a seulement deux éléments σ_1 et σ_2, définis par

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

et il est clair que $\varepsilon(\sigma_1) = 1$, tandis que $\varepsilon(\sigma_2) = -1$. Selon la définition (4), il vient

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \varepsilon(\sigma_1)\, a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + \varepsilon(\sigma_2)\, a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

On retrouve ainsi la définition donnée dans l'exemple 4.1 de TLM1, page 39.

Exemple 4 Le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ contient 6 éléments σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, σ_5 et σ_6, donnés par

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \sigma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \sigma_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

On vérifie sans difficulté (faites-le) que leurs signatures respectives sont $\varepsilon(\sigma_1) = 1$, $\varepsilon(\sigma_2) = -1$, $\varepsilon(\sigma_3) = -1$, $\varepsilon(\sigma_4) = -1$, $\varepsilon(\sigma_5) = 1$, $\varepsilon(\sigma_6) = 1$. Selon la définition (4), on a donc

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \varepsilon(\sigma_1)\, a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} a_{3\sigma_1(3)} + \varepsilon(\sigma_2)\, a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} a_{3\sigma_2(3)} + \varepsilon(\sigma_3)\, a_{1\sigma_3(1)} a_{2\sigma_3(2)} a_{3\sigma_3(3)} \\ &\quad + \varepsilon(\sigma_4)\, a_{1\sigma_4(1)} a_{2\sigma_4(2)} a_{3\sigma_4(3)} + \varepsilon(\sigma_5)\, a_{1\sigma_5(1)} a_{2\sigma_5(2)} a_{3\sigma_5(3)} + \varepsilon(\sigma_6)\, a_{1\sigma_6(1)} a_{2\sigma_6(2)} a_{3\sigma_6(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31}. \end{aligned}$$

On retrouve la valeur du déterminant d'ordre 3 donnée par la règle de Sarrus (section 4.3).

Remarque 1 Revenons à la définition générale d'un déterminant d'ordre n [formule (4)]. Introduisons, pour toute permutation σ de $\mathcal{S}_n$, la permutation inverse σ^{-1}, qui vérifie $i = \sigma^{-1}(\sigma(i))$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. Il vient

$$\Delta = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma^{-1}(\sigma(1)),\sigma(1)} a_{\sigma^{-1}(\sigma(2)),\sigma(2)} \cdots a_{\sigma^{-1}(\sigma(n)),\sigma(n)}.$$

Or les nombres $\sigma(1), ..., \sigma(n)$ ne sont rien d'autre que les nombres $1, ..., n$, mais rangés dans un ordre différent (par définition d'une permutation). Donc, en réordonnant les facteurs $a_{\sigma^{-1}(\sigma(i)),\sigma(i)} = a_{\sigma^{-1}(j),j}$ dans l'expression ci-dessus, on obtient

$$\Delta = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma^{-1}(1),1}\, a_{\sigma^{-1}(2),2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n}.$$

De plus, lorsque σ décrit $\mathcal{S}_n$, $\sigma^{-1} = \chi$ décrit également $\mathcal{S}_n$. Puisque $\varepsilon(\chi) = \varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) = \varepsilon(\sigma)$, il vient finalement

$$\Delta = \sum_{\chi\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\chi)\, a_{\chi(1),1}\, a_{\chi(2),2} \cdots a_{\chi(n),n}. \tag{6}$$

Cette expression montre que *le calcul d'un déterminant se fait de la même manière par rapport aux lignes et aux colonnes* : dans (4), les permutations s'effectuent sur le numéro de colonne ; dans (5), elles s'effectuent sur le numéro de ligne. Cette "symétrie" par rapport aux lignes et aux colonnes est une des propriétés fondamentales des déterminants.

3 Calcul pratique des déterminants

3.1 Interversion de lignes ou de colonnes

Théorème 4 *Lorsqu'on intervertit deux colonnes d'un déterminant, celui-ci change de signe. Il en est de même lorsqu'on intervertit deux lignes.*

Démonstration Supposons par exemple que nous intervertissions les colonnes i et j dans le déterminant Δ défini par (4). Ceci revient à appliquer à $\{1, 2, ..., n\}$ la transposition τ qui échange i et j. Le déterminant Δ' correspondant vaut

$$\Delta = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(\tau(1))}\, a_{2\sigma(\tau(2))} \cdots a_{n\sigma(\tau(n))}.$$

Lorsque σ décrit $\mathcal{S}_n$, $\chi = \sigma\circ\tau$ décrit aussi $\mathcal{S}_n$, et on a $\varepsilon(\chi) = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$ en vertu du théorème 3. Par conséquent, en remplaçant σ par χ, on a bien

$$\Delta' = -\sum_{\chi\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\chi)\, a_{1\chi(1)}\, a_{2\chi(2)} \cdots a_{n\chi(n)} = -\Delta.$$

Corollaire 1 *Lorsqu'un déterminant a deux lignes identiques (ou deux colonnes identiques), il est nul.*

Démonstration En vertu du théorème 4, $\Delta(L_1, ..., L_i, ..., L_j, ..., L_n) = -\Delta(L_1, ..., L_j, ..., L_i, ..., L_n)$.
Si $L_i = L_j$, on a donc $\Delta(L_1, ..., L_i, ..., L_i, ..., L_n) = -\Delta(L_1, ..., L_i, ..., L_i, ..., L_n)$.
Donc $2\Delta(L_1, ..., L_i, ..., L_i, ..., L_n) = 0$. Le déterminant est donc nul.

3.2 Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne

Rappelons que, *si* a_{ij} *est un élément d'un déterminant* Δ *d'ordre* n*, le* mineur A_{ij} *associé à* a_{ij} est *le déterminant d'ordre* $n-1$ *obtenu en supprimant, dans* Δ*, les éléments de la ligne* i *et de la colonne* j. Nous démontrons maintenant le théorème 4.1 de TLM1 :

Théorème 5 *Soit* Δ *défini par* (4). *Pour toute ligne* i *et toute ligne* j, *on a*

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} A_{ij}.$$

Démonstration Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Alors on a $\sigma(1) = 1$, ou $\sigma(1) = 2$, ..., ou $\sigma(1) = n$, et ces différents cas s'excluent mutuellement. Par conséquent (4) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_n\\ \sigma(1)=1}} \varepsilon(\sigma)\, a_{11}\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_n\\ \sigma(1)=2}} \varepsilon(\sigma)\, a_{12}\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + ... + \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_n\\ \sigma(1)=n}} \varepsilon(\sigma)\, a_{1n}\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= a_{11} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_n\\ \sigma(1)=1}} \varepsilon(\sigma)\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + a_{12} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_n\\ \sigma(1)=2}} \varepsilon(\sigma)\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + ... + a_{1n} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_n\\ \sigma(1)=n}} \varepsilon(\sigma)\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.
\end{aligned}$$

Ainsi Δ apparaît comme une combinaison linéaire des éléments a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n} de sa première ligne. Les coefficients de ces éléments ne dépendent que des éléments des lignes suivantes. Si nous faisons dans l'expression précédente $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, ..., $a_{1,n} = 0$, $a_{1n} = 0$, nous obtenons donc le coefficient de a_{11} :

$$\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_n\\ \sigma(1)=1}} \varepsilon(\sigma)\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Or, dire que $\sigma(1) = 1$ revient à dire que σ permute seulement les éléments 2 ..., $n-1$, n. Ainsi on a, en utilisant (4),

$$\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_n\\ \sigma(1)=1}} \varepsilon(\sigma)\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \ddots & & \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nous avons donc montré que le coefficient de a_{11} est le mineur A_{11}. Si nous comparons à (5), nous voyons qu'on a aussi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \ddots & & \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Calculons maintenant le coefficient de a_{12}. Il vaut

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

car le déterminant change de signe lorsqu'on intervertit les deux premières colonnes. En utilisant (6), on voit que le coefficient de a_{12} vaut $-A_{12}$. D'une manière générale, pour obtenir le coefficient de a_{1j}, il faudra effectuer $j-1$ interversions de colonnes, de façon à amener la colonne j en première position ; ainsi le coefficient de a_{1j} vaut $(-1)^{j-1} A_{1j}$. On a donc

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{1j} A_{1j}.$$

C'est la formule de développement par rapport à la première ligne. Si on développe par rapport à la ligne i, on commence par effectuer $i-1$ interversions de lignes (qui provoqueront $i-1$ changements de signe), de façon à amener la ligne i en ligne 1, puis on applique la formule ci-dessus. Il vient

$$\Delta = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j-2} a_{ij} A_{ij}.$$

Puisque $(-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$, le théorème 5 est démontré pour les lignes (et donc aussi pour les colonnes).

3.3 Linéarité des déterminants

Théorème 6 *Lorsqu'on multiplie tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) d'un déterminant par λ, le déterminant est multiplié par λ.*

Démonstration Ceci résulte immédiatement du théorème 5 : si on multiplie tous les éléments de la ligne i du déterminant Δ par λ par exemple, le nouveau déterminant Δ' vaut

$$\Delta' = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (\lambda a_{ij}) A_{ij} = \lambda \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} = \lambda \Delta.$$

Théorème 7 *Un déterminant est inchangé lorsqu'on ajoute à une ligne un multiple d'une autre ligne (ou à une colonne un multiple d'une autre colonne).*

Démonstration Supposons par exemple qu'on ajoute à la ligne i un multiple de la ligne k (avec $k \neq i$) dans le déterminant Δ. Comme dans le chapitre 4, nous symboliserons cette opération par $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. Le nouveau déterminant vaut, en vertu du théorème 5,

$$\Delta' = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (a_{ij} + \lambda a_{kj}) A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} + \lambda \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} A_{ij}.$$

Or la deuxième somme représente le déterminant δ qui se déduit de Δ en remplaçant la ligne i par la ligne k. Ce déterminant a donc deux lignes égales ; ainsi il est nul (corollaire 1). Donc $\Delta' = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} = \Delta$.

Remarque 2 On prendra bien garde, dans l'utilisation du théorème 7, à ne pas multiplier au préalable la ligne (ou colonne) sur laquelle on opère : le déterminant est inchangé par $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. Par contre, si on effectue par exemple $L_i \leftarrow \lambda L_i + L_j$, cela signifie qu'on multiplie d'abord la ligne i par λ : le déterminant est alors multiplié par λ (théorème 6).

Remarque 3 Si on combine les théorèmes 6 et 7, il vient

$$\Delta(C_1, ..., \lambda C_i + \mu C_i', ..., C_n) = \lambda \Delta(C_1, ..., C_i, ..., C_n) + \mu \Delta(C_1, ..., C_i', ..., C_n).$$

On voit donc que le déterminant est *linéaire* par rapport à chacune de ses n colonnes : on dit que c'est une *forme* n-*linéaire.* En outre, on a vu que le déterminant change de signe lorsqu'on intervertit deux colonnes (théorème 4) ; on dit que c'est une forme *alternée.* Ainsi le déterminant d'ordre n est une *forme n-linéaire alternée.* Cette propriété vaut pour les colonnes et pour les lignes.

4 Déterminant de Vandermonde

Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des nombres réels ou complexes ($n \geq 2$). Le *déterminant de Vandermonde* $V(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ est le déterminant d'ordre n défini par

$$V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant de Vandermonde se calcule par la formule suivante :

$$V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i). \tag{9}$$

Pour calculer par exemple le déterminant de Vandermonde d'ordre 4, on choisira dans la formule (7) tous les couples (i, j) vérifiant $1 \leq i < j \leq 4$, c'est-à-dire dans l'ordre les couples $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$. Ainsi

$$V(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3).$$

Exemple 5 Calculer le déterminant de Vandermonde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 8 & 27 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & (-1)^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & (-1)^3 \end{vmatrix} = V(1,2,3,-1).$$

Il vient $\Delta = (2-1)(3-1)(-1-1)(3-2)(-1-2)(-1-3) = -48$.

Démontrons la formule (7). Observons d'abord que si deux des a_i sont égaux, elle est vraie : en effet, dans ce cas $V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$ puisqu'il contient deux colonnes identiques, et la formule (7) donne bien 0 puisque le membre de droite contient un facteur égal à 0. On peut donc supposer que les a_i sont distincts deux à deux. Démontrons alors (7) par récurrence.Elle est vraie pour $n = 2$ car

$$V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 = \prod_{1 \le i < j \le 2} (a_j - a_i).$$

Supposons donc (7) vraie à l'ordre $n-1$, et montrons qu'elle est vraie à l'ordre n. Pour cela, on utilise une *méthode d'usage fréquent* dans les calculs de déterminants : l'utilisation de polynômes. Pour $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ fixés, considérons le polynôme

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Il est immédiat que $P(a_n) = V(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Par ailleurs, si on développe le déterminant qui définit $P(x)$ par rapport à sa dernière colonne, on voit que $P(x)$ est un polynôme de degré $n-1$, et que le coefficient de x^{n-1} est précisément $V(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$. Or on a $P(a_1) = P(a_2) = \cdots = P(a_{n-1}) = 0$, car alors le déterminant a deux colonnes égales. Les a_i étant deux à deux distincts, $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})$ se met en facteur dans $P(x)$. Ainsi

$$P(x) = Q(x)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1}), \text{ avec } Q(x) \in \mathbb{C}[x].$$

En comparant les degrés à droite et à gauche, on voit que $\deg Q = 0$, c'est-à-dire que $Q(x)$ est une constante. En comparant les termes de plus haut degré à droite et à gauche, on voit que cette constante est $V(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$. Donc

$$P(x) = V(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1}).$$

D'où, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = P(a_n) = V(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) = \prod_{1 \le i < j \le n-1} (a_j - a_i) \times \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

Ainsi (7) est démontrée par récurrence.

DETERMINANTS

Exercice 1 Décomposer la permutation de 10 éléments

$$\chi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 10 & 2 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

en produit de transpositions. En déduire sa signature.

Exercice 2 Démontrer le théorème 3.

Exercice 3 Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

Exercice 4 Soit le déterminant $D = \begin{vmatrix} 2 & 15 & -1 & 10 \\ -5 & 6 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & 6 & 10 \\ -12 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.
Sans le calculer, montrer que D est un entier divisible par 11.

Exercice 5 Soit $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.
Sans le calculer, démontrer que Δ est un entier divisible par 12.

Exercice 6 On se propose de calculer $\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 & 1 \\ 2 & 2 & c & 1 \\ 2 & 2 & 2 & d \end{vmatrix}$. Pour cela, soit $P(x) = \begin{vmatrix} a+x & 1+x & 1+x & 1+x \\ 2+x & b+x & 1+x & 1+x \\ 2+x & 2+x & c+x & 1+x \\ 2+x & 2+x & 2+x & d+x \end{vmatrix}$.
1) Démontrer que $\deg P \leq 1$.
2) Calculer $P(-1)$ et $P(2)$. En déduire $P(x)$ en fonction de x.
3) Déterminer la valeur de Δ.

Exercice 7 Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Calculer $H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix}$.

Exercice 8 Soit $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ A(1) & A(2) & A(3) & A(4) \\ B(1) & B(2) & B(3) & B(4) \\ C(1) & C(2) & C(3) & C(4) \end{vmatrix}$, où

$$A(x) = a_0 + a_1 x\,;\; B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2\,;\; C(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3.$$

Démontrer que $\Delta = a_1 b_2 c_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$. En déduire la valeur de Δ.

Exercice 9 Soit le *déterminant circulant* d'ordre 3, $C_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

Son nom vient du fait que la deuxième ligne s'obtient par permutation circulaire à partir de la première ligne, et la troisième par permutation circulaire à partir de la deuxième ligne. Pour le calculer, on considère le polynôme

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & b & c \\ c & x & b \\ b & c & x \end{vmatrix}.$$

1) Quel est le degré de P ? Quel est le coefficient du terme de plus haut degré ?

2) Montrer que $P(-b-c) = 0$.
3) Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que $P\left(-bj - cj^2\right) = P\left(-bj^2 - cj\right) = 0$.
4) En déduire l'expression de $P(x)$ en fonction de x, puis C_3.

Exercice 10 Calculer $C_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$.

Exercice 11 Les nombres complexes b_1, b_2, ..., b_n sont donnés. Calculer

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 1-b_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 12 Calculer pour tout x le déterminant

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & x+2 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & x+3 & \cdots & 3 \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & \cdots & n & n & x+n \end{vmatrix}.$$

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 1 Soit donc $\chi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 10 & 2 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

La première transposition est par exemple χ_1, qui inverse le premier élément et le quatrième, de façon à placer 4 en première position. La disposition est alors

$$4 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

Nous utilisons ensuite χ_2, qui intervertit le deuxième élément et le sixième. La disposition devient

$$4 \quad 6 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \quad 2 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

Le troisième élément étant à sa place, il n'est pas nécessaire d'y toucher. Utilisons maintenant χ_3, qui intervertit le quatrième et le cinquième élément. On obtient la disposition

$$4 \quad 6 \quad 3 \quad 5 \quad 1 \quad 2 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

On applique ensuite χ_4, qui intervertit le cinquième et le dixième élément :

$$4 \quad 6 \quad 3 \quad 5 \quad 10 \quad 2 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 1$$

Le sixième élément est à sa place. On utilise χ_5 qui intervertit le septième et le dixième :

$$4 \quad 6 \quad 3 \quad 5 \quad 10 \quad 2 \quad 1 \quad 8 \quad 9 \quad 7$$

Puis χ_6 qui intervertit le huitième et le dixième :

$$4 \quad 6 \quad 3 \quad 5 \quad 10 \quad 2 \quad 1 \quad 7 \quad 9 \quad 8$$

Enfin χ_7 intervertit les deux derniers éléments, et on a $\chi = \chi_7 \circ \chi_6 \circ \chi_5 \circ \chi_4 \circ \chi_3 \circ \chi_2 \circ \chi_1$.
On en déduit que la signature de χ vaut $\varepsilon(\chi) = (-1)^7 = -1$.

Exercice 2 Supposons que σ s'écrit comme composée de n transpositions $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$, tandis que χ s'écrit comme produit de m transpositions $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_m$. Alors

$$\sigma \circ \chi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_n \circ \chi_1 \circ \chi_2 \circ \cdots \circ \chi_m$$

s'écrit comme produit de $n + m$ transpositions, de telle sorte que

$$\varepsilon(\sigma \circ \chi) = (-1)^{n+m} = (-1)^n \times (-1)^m = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\chi).$$

Donc la signature de la composée est le produit des signatures. De plus, si on a $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_n$, alors $\sigma^{-1} = \sigma_n^{-1} \circ \sigma_{n-1}^{-1} \circ \cdots \circ \sigma_1^{-1} = \sigma_n \circ \sigma_{n-1} \circ \cdots \circ \sigma_1$. Donc $\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) = \varepsilon(\sigma)$.

Exercice 3 On fait apparaître des zéros dans la première ligne, par exemple, en effectuant les opérations $C_1 \longleftarrow C_1 - 2C_5$, $C_2 \longleftarrow C_2 - C_5$, $C_3 \longleftarrow C_3 - C_5$, $C_4 \longleftarrow C_4 - C_5$. Puis on développe par rapport à la première ligne. Il vient

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ -11 & -5 & -5 & -5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ -11 & -5 & -5 & -5 \end{vmatrix}.$$

On fait apparaître un zéro supplémentaire dans la première ligne par $C_2 \longleftarrow C_2 + 2C_1$, puis on développe de nouveau par rapport à la première ligne :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -11 & -27 & -5 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ -27 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 394.$$

Exercice 4 Effectuons l'opération $L_4 \leftarrow L_4 + L_3 + L_2 + L_1$. Il vient

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 15 & -1 & 10 \\ -5 & 6 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & 6 & 10 \\ -11 & 22 & 11 & 33 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 2 & 15 & -1 & 10 \\ -5 & 6 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & 6 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

car 11 se met en facteur dans le ligne 4. Or un déterminant à coefficients entiers est entier, donc D est divisible par 11.

Exercice 5 Effectuons l'opération $C_5 \leftarrow C_5 + 10C_4 + 100C_3 + 1000C_2 + 10000C_1$. Il vient

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 21312 \\ 9 & 3 & 1 & 2 & 93120 \\ 1 & 8 & 4 & 4 & 18444 \\ 6 & 1 & 1 & 2 & 61128 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 13116 \end{vmatrix}.$$

Or les nombres 21312, 93120, 18444, 61128 et 13116 sont tous divisibles par 3, car la somme de leurs chiffres l'est. Par conséquent il existe des entiers p, q, r, s et t tels que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 3p \\ 9 & 3 & 1 & 2 & 3q \\ 1 & 8 & 4 & 4 & 3r \\ 6 & 1 & 1 & 2 & 3s \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3t \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & p \\ 9 & 3 & 1 & 2 & q \\ 1 & 8 & 4 & 4 & r \\ 6 & 1 & 1 & 2 & s \\ 1 & 3 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}.$$

Ainsi Δ est un entier multiple de 3. De même 21312, 93120, 18444, 61128 et 13116 sont tous divisibles par 4, car les nombres 12, 20, 44, 28 et 16 formés par leurs deux derniers chiffres le sont. Ainsi Δ est aussi divisible par 4. Puisque 3 et 4 sont premiers entre eux, Δ est divisible par $3 \times 4 = 12$.

Exercice 6 1) Utilisons la linéarité par rapport à la première colonne :

$$P(x) = \begin{vmatrix} a & 1+x & 1+x & 1+x \\ 2 & b+x & 1+x & 1+x \\ 2 & 2+x & c+x & 1+x \\ 2 & 2+x & 2+x & d+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1+x & 1+x & 1+x \\ x & b+x & 1+x & 1+x \\ x & 2+x & c+x & 1+x \\ x & 2+x & 2+x & d+x \end{vmatrix}.$$

Dans chacun des déterminants, utilisons la linéarité par rapport à la deuxième colonne :

$$P(x) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1+x & 1+x \\ 2 & b & 1+x & 1+x \\ 2 & 2 & c+x & 1+x \\ 2 & 2 & 2+x & d+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x & 1+x & 1+x \\ 2 & x & 1+x & 1+x \\ 2 & x & c+x & 1+x \\ 2 & x & 2+x & d+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1+x & 1+x \\ x & b & 1+x & 1+x \\ x & 2 & c+x & 1+x \\ x & 2 & 2+x & d+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & 1+x & 1+x \\ x & x & 1+x & 1+x \\ x & x & c+x & 1+x \\ x & x & 2+x & d+x \end{vmatrix}.$$

On observe que le quatrième déterminant est nul, puisqu'il possède deux colonnes identiques (des x). Si nous utilisons, dans les déterminants restants, la linéarité par rapport à la trosième colonne, puis par rapport à la quatrième, nous voyons que $P(x)$ s'écrit comme une somme de déterminants qui, soit ne contiennent pas x, soit contiennent une seule colonne de x (puisque le déterminant est nul s'il en contient 2). Dans ces derniers, x se met en facteur dans les colonnes correspondantes, et il reste alors un déterminant qui ne contient pas x. Ainsi $P(x) = Ax + B$.

2) En remplaçant dans la définition de $P(x)$, il vient :

$$P(-1) = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & c-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & d-1 \end{vmatrix} = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1).$$

De même $P(-2) = (a-2)(b-2)(c-2)(d-2)$.
Il en résulte, puisque $P(x) = Ax + B$:

$$\begin{cases} -A + B = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \\ -2A + B = (a-2)(b-2)(c-2)(d-2). \end{cases}$$

On en déduit immédiatement :

$$\begin{cases} A = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1) - (a-2)(b-2)(c-2)(d-2) \\ B = 2(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) - (a-2)(b-2)(c-2)(d-2) \end{cases}$$

3) On a donc $\Delta = P(0) = B = 2(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) - (a-2)(b-2)(c-2)(d-2)$.

Exercice 7 On sait que $j^3 = 1$ (exemple 34.1 de TLM1, page 434). Par conséquent $j = j^4 = \left(j^2\right)^2$ et H est le déterminant de Vandermonde $H = V\left(1, j, j^2\right) = (j-1)\left(j^2-1\right)\left(j^2-j\right)$. Or $j^2 + j + 1 = 0$, donc $j^2 = -j - 1$. Ainsi

$$H = (j-1)(j+2)(2j+1) = \left(j^2 + j - 2\right)(2j+1) = -3(2j+1).$$

Or $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et finalement : $H = -3\sqrt{3}i$.

Exercice 8 Remplaçons $A(x)$ par sa valeur et utilisons la linéarité par rapport à la deuxième ligne. On obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_0 + a_1 & a_0 + 2a_1 & a_0 + 3a_1 & a_0 + 4a_1 \\ B(1) & B(2) & B(3) & B(4) \\ C(1) & C(2) & C(3) & C(4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_0 & a_0 & a_0 & a_0 \\ B(1) & B(2) & B(3) & B(4) \\ C(1) & C(2) & C(3) & C(4) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & 2a_1 & 3a_1 & 4a_1 \\ B(1) & B(2) & B(3) & B(4) \\ C(1) & C(2) & C(3) & C(4) \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant a deux lignes proportionnelles, donc il est nul.

Dans le deuxième, mettons a_1 en facteur dans la deuxième ligne, puis remplaçons $B(x)$ par sa valeur et utilisons la linéarité par rapport à la troisième ligne :

$$\begin{aligned}\Delta &= a_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_0+b_1+b_2 & b_0+2b_1+2^2b_2 & b_0+3b_1+b_2 3^2 & b_0+4b_1+4^2b_2 \\ C(1) & C(2) & C(3) & C(4) \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_0 & b_0 & b_0 & b_0 \\ C(1) & C(2) & C(3) & C(4) \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_1 & 2b_1 & 3b_1 & 4b_1 \\ C(1) & C(2) & C(3) & C(4) \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_2 & 2^2b_2 & 3^2b_2 & 4^2b_2 \\ C(1) & C(2) & C(3) & C(4) \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Les deux premiers déterminants sont nuls car ils ont deux lignes proportionnelles. Dans le troisième b_2 se met en facteur. En remplaçant enfin $C(x)$ et en utilisant la linéarité par rapport à la troisième ligne, on obtient

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 V(1,2,3,4) = 12 a_1 b_2 c_3.$$

Exercice 9 1) Le terme de plus haut degré de $P(x)$ s'obtient en multipliant x par x par x quand on développe le déterminant, donc ce terme est x^3 et $\deg P = 3$.

2) Effectuons l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$. Alors

$$P(x) = \begin{vmatrix} x+b+c & b & c \\ c+x+b & x & b \\ b+c+x & c & x \end{vmatrix} \Rightarrow P(-b-c) = 0.$$

3) Effectuons de même $C_1 \leftarrow C_1 + jC_2 + j^2C_3$. Il vient

$$P(x) = \begin{vmatrix} x+bj+cj^2 & b & c \\ c+xj+bj^2 & x & b \\ b+cj+xj^2 & c & x \end{vmatrix}.$$

Or $j^3 = 1$; si nous mettons j en facteur dans le premier terme de la deuxième ligne et j^2 en facteur dans le premier terme de la troisième ligne, on obtient

$$P(x) = \begin{vmatrix} x+bj+cj^2 & b & c \\ j\left(cj^2+x+bj\right) & x & b \\ j^2\left(bj+cj^2+x\right) & c & x \end{vmatrix} \Rightarrow P\left(-bj-cj^2\right) = 0.$$

En effectuant $C_1 \leftarrow C_1 + j^2C_2 + jC_3$, on montre de même que $P\left(-bj^2-cj\right) = 0$.

3) On a donc trouvé trois racines de $P(x)$. Ainsi $P(x) = \alpha(x+b+c)\left(x+bj+cj^2\right)\left(x+bj^2+cj\right)$.

En comparant les termes de degré 3, on voit que $\alpha = 1$. Donc $C_3 = P(a) = (a+b+c)\left(a+bj+cj^2\right)\left(a+bj^2+cj\right)$.

Exercice 10 On observe que C_4 est le déterminant circulant d'ordre 4. Procédons de même que dans l'exercice 9 en introduisant le polynôme

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & b & c & d \\ d & x & b & c \\ c & d & x & b \\ b & c & d & x \end{vmatrix}.$$

On utilise dans ce cas les quatre racines quatrièmes complexes de 1, qui sont 1, i, -1 et $-i$. En effectuant successivement les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, $C_1 \leftarrow C_1 + iC_2 - C_3 - iC_4$, $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3 - C_4$ et $C_1 \leftarrow C_1 - iC_2 - C_3 + iC_4$, on vérifie que $P(-b-c-d) = P(-ib+c+id) = P(b-c+d) = P(ib+c-id) = 0$.

On obtient finalement

$$\begin{aligned} C_4 &= P(a) = (a+b+c+d)(a+ib-c-id)(a-b+c-d)(a-ib-c+id) \\ &= \left[(a+c)^2-(b+d)^2\right]\times\left[(a-c)^2+(b-d)^2\right]. \end{aligned}$$

Exercice 11 Notons $D_{n+1}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ le déterminant cherché, qui est de dimension $n+1$. En ajoutant la première ligne à la deuxième, puis en développant par rapport à la première colonne, il vient

$$D_{n+1}(b_1, b_2, \cdots, b_n) = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 1-b_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}. = \begin{vmatrix} 1 & b_2 & & 0 \\ -1 & 1-b_2 & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ \cdots & 0 & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

Par conséquent $D_{n+1}(b_1, b_2, \cdots, b_n) = D_n(b_2, \cdots, b_n) = \cdots = D_3(b_{n-1}, b_n) = \begin{vmatrix} 1 & b_{n-1} & 0 \\ -1 & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$.

En effectuant de nouveau $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$, on obtient finalement

$$D_{n+1}(b_1, b_2, \cdots, b_n) = \begin{vmatrix} 1 & b_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 & b_n \\ 0 & -1 & 1-b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_n \\ -1 & 1-b_n \end{vmatrix} = 1.$$

Exercice 12 Soustrayons la dernière colonne au $n-1$ premières. On obtient $D_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 3 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -x & -x & -x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$.

On observe que x se met en facteur dans chacune des $n-1$ premières colonnes. Il vient

$$D_n = x^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 3 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & x+n \end{vmatrix}.$$

Or il est manifeste que $D_n(x)$ est un polynôme de degré n en x, et que son terme de plus haut degré est x^n. Puisque x^{n-1} divise $D_n(x)$, il suffit de trouver la *n*-ième racine de D_n. Or si nous revenons à l'expression de départ, et ajoutons toutes les lignes à la dernière, nous obtenons, en tenant compte du fait que $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$,

$$D_n = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & x+2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & & & \vdots \\ x+\dfrac{n(n+1)}{2} & x+\dfrac{n(n+1)}{2} & \cdots & x+\dfrac{n(n+1)}{2} \end{vmatrix}.$$

Ainsi $x = -\dfrac{n(n+1)}{2}$ est racine de D_n. Finalement donc : $D_n(x) = x^{n-1}\left[x+\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$.