SECTIONS CONIQUES

Le but de ce complément est de montrer que l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan ne passant pas par le sommet du cône est une ellipse, une parabole ou une hyperbole (section 15.3 de TLM1).

Considérons donc un plan $(\mathcal{P})$ qui coupe un cône de révolution (Γ). On suppose que $(\mathcal{P})$ ne passe pas par le sommet Ω de (Γ). Soit (C) la section de (Γ) par $(\mathcal{P})$; si $(\mathcal{P})$ est horizontal, alors (C) est un cercle, et nous écartons ce cas simple. Soit Σ la sphère intérieure tangente à (Γ) et tangente à $(\mathcal{P})$ en F (figure 1)

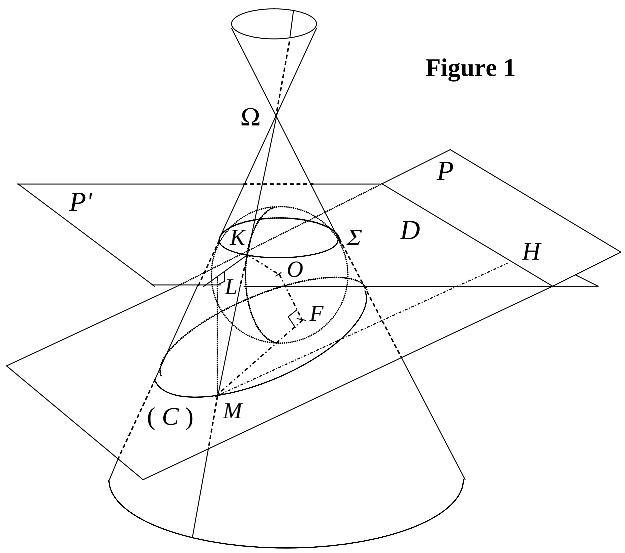

Figure 1

L'ensemble des points de contact de Σ et (Γ) est un cercle horizontal, qui définit un plan $(\mathcal{P}')$, lui aussi horizontal. Soit M un point de (C). La génératrice $(\Omega\mathsf{M})$ coupe le cercle précédent en K. On note $\mathcal{D}$ la droite d'intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$, et L et H les projections orthogonales respectives de M sur $(\mathcal{P}')$ et $\mathcal{D}$.

Nous allons établir une relation très simple entre MF et MH. D'abord, si on travaille dans le plan (FMK) (figure 2), on voit que les droites (MK) et (MF) sont tangentes au cercle (Σ') intersection de (Σ) et de (FMK). Donc

$$\mathsf{MF} = \mathsf{MK}. \tag{1}$$

Ensuite, dans le plan vertical (MLK), l'angle α entre la verticale et la génératrice (MK) est constant, puisque (Γ) est un cône de révolution. Donc (voir figure 3)

$$\mathsf{ML} = \mathsf{MK}.\cos\alpha = \mathsf{MF}.\cos\alpha. \tag{2}$$

Enfin, dans le plan vertical (MLH), on a $\mathsf{ML} = \mathsf{MH}.\cos\beta$, où β est l'angle entre le plan $(\mathcal{P})$ et la verticale (figure 4).

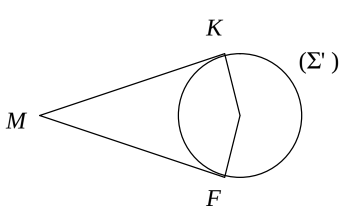

Figure 2 : dans le plan (*FMK*)

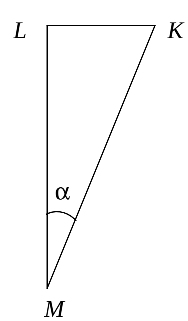

Figure 3 : dans le plan (*MLK*)

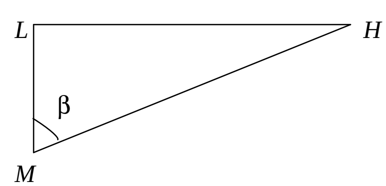

Figure 4 : dans le plan (*MLH*)

En reportant dans (2), il vient donc

$$\mathsf{MF} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\mathsf{MH} \tag{3}$$

Interprétons maintenant cette relation dans le plan $(\mathcal{P})$. Posons

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}. \tag{4}$$

Alors la relation (3) exprime que la section (C) est l'ensemble des points M du plan $(\mathcal{P})$ tels que le rapport des distances au point fixe F et à la droite $(\mathcal{D})$ soit constant et égal à e (figure 5).

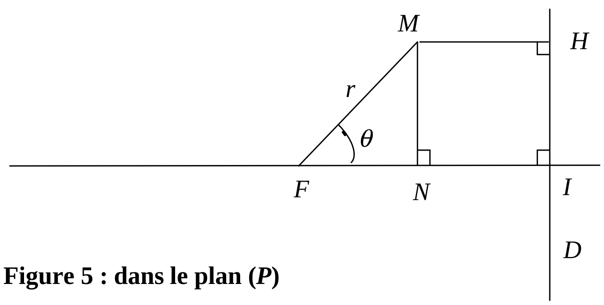

Figure 5 : dans le plan (*P*)

Soit I la projection orthogonale de F sur $(\mathcal{D})$. Posons $p = eFI$. La relation (3) $MF = eMH$ se traduit par

$$r = eIN = e\,(FI - FN) = p - er\cos\theta.$$

Il en résulte que (C) a pour équation polaire, relativement au point F,

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}. \tag{5}$$

Ainsi la section du cône de révolution (Γ) par un plan $(\mathcal{P})$ ne passant pas par son sommet est une conique, c'est-à-dire une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

La nature de la conique dépend de l'angle β formé par le plan de coupe avec la verticale (figure 6).

Plus précisément, si $e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} < 1$, c'est-à-dire si $\beta > \alpha$, alors la section est une *ellipse*. Dans ce cas $(\mathcal{P})$ est faiblement incliné par rapport à l'horizontale.

Si $e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 1$, c'est-à-dire si $\beta = \alpha$ [ce qui signifie que le plan de coupe est parallèle à une génératrice du cône], la section est une *parabole*.

Enfin, si $e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} > 1$, c'est-à-dire si $\beta < \alpha$, alors la section est une *hyperbole*. Dans ce cas $(\mathcal{P})$ est fortement incliné par rapport à l'horizontale.

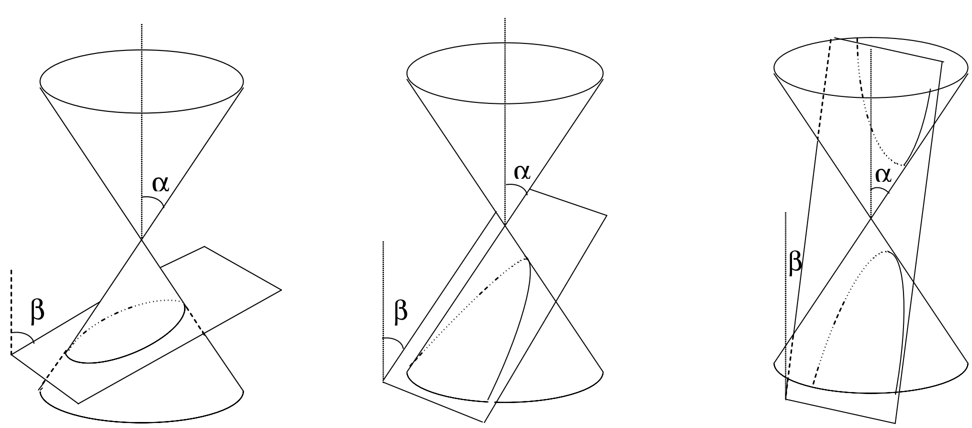

Figure 6

Notons que nous avons démontré, au passage, le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit* F *un point du plan, et* (D) *une droite ne passant pas par* F. *Soit* $\mathsf{e} \in \mathbb{R}_+^*$. *L'ensemble des points* M *du plan qui vérifient*

$$\mathsf{MF} = e\mathsf{MH} \tag{6}$$

où H *désigne la projection orthogonale de* M *sur* (D), *est une conique* (C) *de foyer* F *et d'excentricité* e.

La droite (D) *s'appelle la* directrice *de* (C).

La relation (6), prise comme point de départ, permet une présentation unifiée des coniques. Voir le complément *Coniques* sur le site http ://touteslesmaths.fr.