Inversion complexe

L'*inversion complexe* est la fonction de variable complexe définie pour tout point $z \neq 0$ par

$$z' = f(z) = \frac{1}{z}. \tag{1}$$

Elle associe à tout nombre complexe non nul son *inverse*. La transformation du plan complexe[1] associée se visualise facilement en notant que

$$|z'| = \frac{1}{|z|} \quad \text{et} \quad \arg z' = -\arg z. \tag{2}$$

Ainsi l'inversion complexe *inverse les distances à l'origine*, en réalisant en outre une *symétrie* par rapport à l'axe des x (Figure 1). Il s'agit de la composée de l'inversion géométrique[2] et de la symétrie orthogonale d'axe Ox.

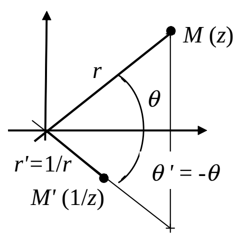

Figure 1

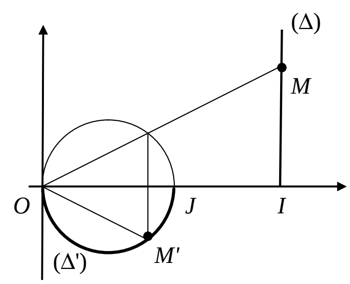

Figure 2

Théorème 1 *L'image par l'inversion complexe d'une droite ne passant pas par* O *est un cercle passant par* O, *privé de* O.

Démonstration On sait (Théorème 7.6 de *Toutes les mathématiques*, page 73) que l'équation polaire d'une droite D ne passant pas par 0 est

$$r = \frac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta}, \quad \text{avec} \quad c \neq 0.$$

Puisque les coordonnées polaires r' et θ' de l'image M' du point M de coordonnées polaires (r, θ) sont $r' = \frac{1}{r}$ et $\theta' = -\theta$, l'équation polaire de (D') est

$$\frac{1}{r'} = \frac{c}{a\cos\theta' - b\sin\theta'} \Leftrightarrow r' = \frac{a}{c}\cos\theta' - \frac{b}{c}\sin\theta'.$$

C'est bien l'équation d'un cercle passant par O (Théorème 7.6 de *Toutes les mathématiques* à nouveau). Evidemment, on doit en exclure le point O car r' ne peut s'annuler.

Exemple 1 Soit $a > 0$. La *construction de Nyquist* s'utilise en Electricité. Elle consiste à transformer la demi-droite verticale (Δ) d'équation $x = a$ avec $y \geq 0$ par l'inversion complexe (Figure 2). L'image de la droite complète est le cercle de diamètre $[OJ]$, où J est l'image de I, c'est-à-dire le point de l'axe des x d'abscisse $\frac{1}{a}$. Donc l'image de la demi-droite (Δ) est le demi-cercle inférieur privé de O. L'image d'un point M de (Δ) se construit aisément : M' est le symétrique par rapport à Ox de l'intersection de la droite (OM) et du cercle complet.

Exemple 2 Montrons comment l'utilisation de l'inversion complexe permet de trouver l'image de la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $x = 2$ par la transformation

$$z' = f(z) = \frac{z+2}{z}$$

Pour cela, nous remarquons que

$$z' = f(z) = 1 + \frac{2}{z},$$

[1] Voir *Toutes les mathématiques*, page 76.

[2] Voir l'exercice 3.12, page 34 du complément *Courbes et géométrie différentielle* du site touteslesmaths.fr.

de telle sorte que f peut *se décomposer* en transformations élémentaires. En effet, pour calculer $z' = f(z)$, les opérations sont les suivantes :

a) Calculer $1/z$, c'est-à-dire utiliser l'inversion complexe (notée ici f_1).

b) Multiplier par 2, c'est à dire transformer $1/z$ par l'homothétie de centre O de rapport 2 (notée ici f_2).

c) Ajouter 1, c'est-à-dire transformer $2/z$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\imath}$ (notée ici f_3).

On a donc $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, c'est-à-dire le schéma suivant :

$$z \longmapsto f_1(z) = \frac{1}{z} \longmapsto f_2\left(f_1(z)\right) = \frac{2}{z} \longmapsto f_3\left[f_2\left(f_1(z)\right)\right] = 1 + \frac{2}{z}.$$

Les transformations qui composent f étant bien connues, on peut trouver sans calcul l'image de $\mathcal{D}$ par f :

a) L'image de $\mathcal{D}$ par l'inversion complexe f_1 est le cercle $\mathcal{D}_1$ de diamètre OA_1, privé de O, où A_1 est le point d'affixe $\frac{1}{2}$.

b) L'image de $\mathcal{D}_1$ par l'homothétie f_2 est le cercle $\mathcal{D}_2$ de diamètre OA_2, privé de O, où A_2 est le point d'affixe 1.

c) Enfin, $\mathcal{D}'$ est l'image de $\mathcal{D}_2$ par la translation f_3, c'est-à-dire le cercle de diamètre A_2A_3, où A_3 est le point d'affixe 2, privé de A_2.

La figure 3 montre les images successives de $\mathcal{D}$, ainsi que la construction du point M' image de $M \in \mathcal{D}$.

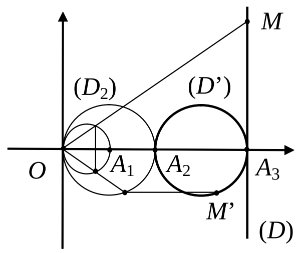

Figure 3