

Courbes et géométrie différentielle

Daniel Duverney

© <http://touteslesmaths.fr>

14 janvier 2022

Avant-propos

Le but de ce complément est de présenter les notions de base permettant l'étude des courbes usuelles dans le plan, en particulier du point de vue de la géométrie analytique. Certaines des courbes étudiées sont d'une grande importance dans les applications. Citons par exemple les cycloïdes et les coniques (ellipse, parabole et hyperbole).

On trouvera en outre dans ce complément une introduction aux notions de base de la *géométrie différentielle*. Celle-ci consiste à utiliser le calcul différentiel et intégral en lien avec les éléments géométriques liés aux courbes : tangente en un point, longueur, surface, rayon de courbure...

Table des matières

Avant-propos	i
Chapitre 1 : Courbes paramétrées	1
1.1 Notion de courbe paramétrée	1
1.2 Etude d'un exemple : la cardioïde	2
1.2.1 Réduction du domaine d'étude	2
1.2.2 Variations simultanées	2
1.2.3 Tangentes aux points remarquables	3
1.2.4 Tracé de la courbe	4
1.3 Exemple d'étude de branche infinie	4
1.4 Cycloïdes	6
1.5 Abscisse curviligne, base de Frénet et courbure	7
1.5.1 Vitesse et accélération dans la base de Frénet	8
1.5.2 Calcul pratique du rayon de courbure	9
1.6 Longueurs et surfaces	10
Exercices	11
Chapitre 2 : Coniques	14
2.1 Ellipse	14
2.1.1 Définition de l'ellipse	14
2.1.2 Foyers et excentricité	15
2.1.3 Propriété bifocale et paramètre	15
2.2 Ellipse et parabole en coordonnées polaires	16
2.3 Hyperbole	17
2.3.1 Définition de l'hyperbole	17
2.3.2 Foyers et excentricité	19
2.3.3 Propriétés bifocale et paramètre	19
2.3.4 Hyperbole en coordonnées polaires	20
2.4 Tangente en un point d'une ellipse ou d'une hyperbole	20
2.5 Sections coniques	21
2.6 Tangente en un point de la parabole	23
Exercices	23
Chapitre 3 : Courbes définies en coordonnées polaires	27
3.1 Définitions et exemples	27
3.2 Lemniscate de Bernoulli	28
3.3 Branches infinies	30
3.4 Longueurs, surfaces et rayon de courbure en polaires	31
Exercices	32
Solutions des exercices	35
Exercices du chapitre 1	35
Exercices du chapitre 2	41
Exercices du chapitre 3	48
Index	56

Chapitre 1

Courbes paramétrées

Les courbes paramétrées ont été brièvement abordées dans la section 10.5 de *Toutes les mathématiques* (page 105), à cause de leur rapport avec la cinématique. Le but de ce chapitre est de fournir des éléments pour l'étude de leurs propriétés géométriques et leur construction. Vous devez :

- A. Savoir construire le tableau des variations simultanées de x et y d'une courbe paramétrée et savoir utiliser ce tableau pour tracer la courbe.
- B. Savoir déterminer la tangente en un point singulier.
- C. Savoir calculer le rayon de courbure dans des cas simples.
- D. Connaître la base mobile de Frénet.
- E. Savoir calculer des longueurs et des surfaces liées à des arcs de courbes.

1.1 Notion de courbe paramétrée

Soit t un paramètre qui varie dans un intervalle I . Dans l'interprétation cinématique, t représente le temps. Bien entendu, dans l'étude mathématique, t n'a pas de signification particulière et peut tout aussi bien s'appeler u , θ , etc. Cependant nous utiliserons souvent l'interprétation cinématique, notamment pour trouver les tangentes en un point singulier.

Une *courbe paramétrée* (C) est le sous-ensemble du plan décrit par un point M dont l'abscisse x et l'ordonnée y sont des fonctions d'un paramètre t . Elle est donc définie par la donnée de deux fonctions f et g , de telle sorte que

$$x = f(t) \text{ et } y = g(t). \quad (1.1)$$

Dans l'interprétation cinématique, (C) est la *trajectoire* de M .

Exemple 1.1 Pour $R > 0$, les équations

$$x = x_\Omega + R \cos t, \quad y = y_\Omega + R \sin t,$$

sont une représentation paramétrique du cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ de rayon R , comme le montre la figure 1.1. Dans ce cas le paramètre t représente l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M})$, et on obtient tout le cercle en faisant varier t sur un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi, +\pi]$.

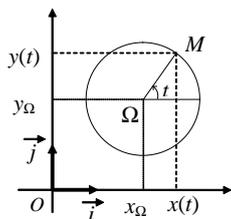


Figure 1.1

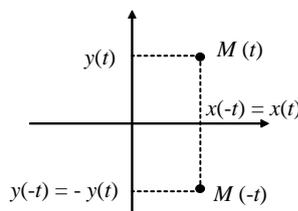


Figure 1.2

De même, l'équation paramétrique

$$x = at + x_0, \quad y = bt + y_0$$

est celle d'une *droite* du plan. Si on se réfère à l'interprétation cinématique, il s'agit de la droite passant par le point $A(x_0, y_0)$, parcourue à vitesse constante $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = a\vec{i} + b\vec{j}$ (mouvement rectiligne uniforme).

On notera que les représentations graphiques $y = f(x)$ usuelles sont des cas particuliers de courbes paramétrées : on peut dans ce cas prendre x comme paramètre, car $x = x$ et $y = f(x)$. Il n'est donc pas surprenant que le plan général d'étude d'une courbe définie par une équation paramétrique soit très semblable au plan d'étude d'une courbe définie par une équation cartésienne $y = f(x)$:

Première étape : On détermine l'ensemble de définition D_f de x et l'ensemble de définition D_g de y .

Deuxième étape : On réduit, lorsque cela est possible, l'*intervalle d'étude*. On utilisera, s'il y a lieu, le fait que f et/ou g soient paires, impaires, ou périodiques, *en s'aidant d'un croquis*.

Troisième étape : On étudie les *variations simultanées* de x et y en fonction de t sur l'intervalle d'étude. Dans le *double tableau de variations*, doivent figurer les points où $x' = f'(t)$ et $y' = g'(t)$ s'annulent. Doivent également figurer les points où f ou g n'est pas définie (double barre verticale) et ceux où f' ou g' n'est pas définie (double barre verticale dans la ligne correspondant à f' ou g').

Quatrième étape : On trace la *courbe* en plaçant impérativement :

- Les points à tangente horizontale ou verticale.
- Les *points singuliers*, où f' et g' s'annulent simultanément.
- Les asymptotes horizontales ou verticales qui apparaissent éventuellement dans le tableau des variations simultanées.

1.2 Etude d'un exemple : la cardioïde

La *cardioïde* est la courbe (C) définie par l'équation paramétrique

$$x = R(2 \cos t - \cos 2t) \quad ; \quad y = R(2 \sin t - \sin 2t). \quad (1.2)$$

Ici R est un réel strictement positif dont nous donnerons la signification dans la section 1.3. Il est clair que x et y sont définis sur \mathbb{R} .

1.2.1 Réduction du domaine d'étude

On observe d'abord que $x(t + 2\pi) = x(t)$ et $y(t + 2\pi) = y(t)$. Donc les points $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$ sont les mêmes, et il suffit de faire varier t dans un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi, \pi]$, pour avoir *toute la courbe*. Dans l'interprétation cinématique, cela signifie que, après un temps $T = 2\pi$, le mobile est revenu au même point : le mouvement est *périodique*.

Ensuite, on a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Cela signifie (Figure 1.2) que les points de paramètres t et $-t$ sont symétriques par rapport à l'axe Ox . Donc la courbe (C) est symétrique par rapport à Ox et il suffit d'étudier les variations de x et y sur $[0, \pi]$. On tracera la courbe pour t variant entre 0 et π , puis on *complètera* le tracé par symétrie par rapport à Ox . L'étude des symétries de la courbe se fera toujours à *partir d'un croquis* du type de la figure 1.2.

1.2.2 Variations simultanées

On calcule les dérivées de x et y par rapport à t :

$$x' = 2R(\sin 2t - \sin t) \quad ; \quad y' = 2R(\cos t - \cos 2t).$$

Pour étudier le signe de x' et y' , transformons les sommes en produits (Formules (1.16) et (1.17) de *Toutes les mathématiques*, page 8). Il vient

$$x' = 4R \sin \frac{t}{2} \cos \frac{3t}{2} \quad \text{et} \quad y' = 4R \sin \frac{t}{2} \sin \frac{3t}{2}.$$

Lorsque t varie entre 0 et π , $\frac{t}{2}$ varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Donc $\sin \frac{t}{2} \geq 0$ et s'annule pour $t = 0$. De même $\frac{3t}{2}$ varie entre 0 et $\frac{3\pi}{2}$ (Figure 1.3). Alors $\cos \frac{3t}{2}$ est d'abord positif, puis il s'annule lorsque $\frac{3t}{2} = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque $t = \frac{\pi}{3}$. Il devient alors négatif et le reste, jusqu'à $t = \pi$ où il s'annule à nouveau. On en déduit le

signe de x' sur $[0, \pi]$ (ci-dessous à gauche). Pour le signe de y' , la figure 1.3 montre que $\sin \frac{3t}{2}$ s'annule pour $t = 0$, puis il est positif jusqu'à ce que $\frac{3t}{2} = \pi$, c'est-à-dire $t = \frac{2\pi}{3}$, où il s'annule. Il devient alors négatif et le reste jusqu'à $t = \pi$.

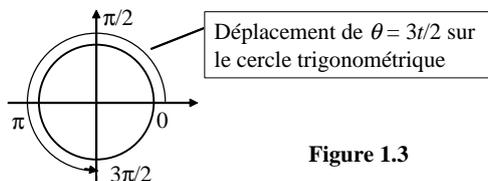


Figure 1.3

D'où le signe de y' (ci-dessous à droite).

t	0	$\pi/3$	π
$\sin(t/2)$	0	+	+
$\cos(3t/2)$		+	0
x'	0	+	0

t	0	$2\pi/3$	π
$\sin(t/2)$	0	+	+
$\sin(3t/2)$		+	0
y'	0	+	0

On regroupe alors dans un seul tableau les *variations simultanées* de x et y lorsque t varie de 0 à π . Ce tableau permet de *visualiser le déplacement* du point M dans le plan lorsque t varie.

t	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	π
x'	0	+	0	-
x	R	$3R/2$	$-R/2$	$-3R$
y'	0	+	+	0
y	0	$\sqrt{3}R$	$3R/2$	0

1.2.3 Tangentes aux points remarquables

Les points remarquables sont ceux qui apparaissent dans le tableau de variations. Si nous revenons à l'interprétation cinématique, nous voyons que *la tangente en un point $M(t)$ est définie par le vecteur vitesse*

$$\vec{v} = \frac{d\vec{M}}{dt} = x' \vec{i} + y' \vec{j},$$

à condition que celui-ci soit *non nul*, c'est-à-dire que x' et y' ne s'annulent pas simultanément. Ainsi au point A de paramètre $t = \frac{\pi}{3}$, la tangente est verticale puisque $x' = 0$ et $y' \neq 0$: elle est dirigée suivant \vec{j} . Au point B de paramètre $t = \frac{2\pi}{3}$, la tangente est horizontale puisque $x' \neq 0$ et $y' = 0$. Au point C de paramètre π , la tangente est de nouveau verticale car $x' = 0$ et $y' \neq 0$.

Au point D de paramètre $t = 0$ par contre, le vecteur \vec{v} ne peut définir la tangente puisqu'il est nul. Si nous nous référons à l'interprétation cinématique, cela signifie que le *mobile marque un temps d'arrêt* en ce point (sa vitesse s'annule). C'est donc l'accélération \vec{a} qui va faire repartir son mouvement, et la tangente sera dirigée suivant \vec{a} (à condition que $\vec{a} \neq 0$).

Or les composantes du vecteur $\vec{a} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}$ sont

$$x'' = 2R(2 \cos 2t - \cos t) \quad , \quad y'' = 2R(2 \sin 2t - \sin t)$$

Pour $t = 0$, on a $\vec{a} = 2R \vec{i}$: la tangente est horizontale au point D .

Un point d'une courbe paramétrique où x' et y' s'annulent simultanément s'appelle un *point singulier*. L'exemple que nous venons de traiter illustre le théorème suivant, que nous admettons sans démonstration.

Théorème 1.1 La tangente au point $M(t_0)$ d'une courbe paramétrée est dirigée par le premier vecteur non nul de la suite

$$\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0), \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}(t_0), \frac{d^3\vec{M}}{dt^3}(t_0), \dots$$

1.2.4 Tracé de la courbe

On trace la courbe en s'aidant du tableau de variations. On place d'abord les points remarquables avec leurs tangentes, en indiquant la valeur correspondante de t entre parenthèses. Puis on les relie en tenant compte des sens de variation de x et y :

- a) Lorsque t varie de 0 à $\frac{\pi}{3}$, x croît et y croît. Le point $M(t)$ se déplace du point D (où la tangente est horizontale) au point A (où la tangente est verticale).
- b) Lorsque t varie de $\frac{\pi}{3}$ à $\frac{2\pi}{3}$, x décroît et y croît. Le point $M(t)$ se déplace du point A (où la tangente est verticale) au point B (où la tangente est horizontale).
- c) Lorsque t varie de $\frac{2\pi}{3}$ à π , x décroît et y décroît. Le point $M(t)$ se déplace du point B (où la tangente est horizontale) au point C (où la tangente est verticale).

On termine en complétant la courbe par symétrie par rapport à Ox .

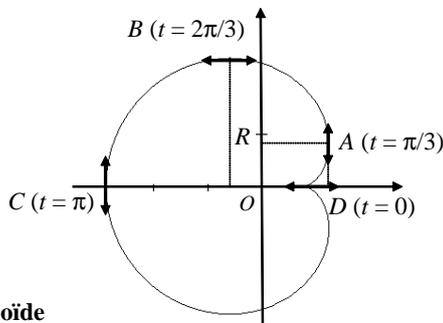


Figure 1.4 : La cardiïde

1.3 Exemple d'étude de branche infinie

Soit la courbe (C) définie par l'équation paramétrique :

$$x = \frac{3}{t^2 - 2t} ; y = \frac{t^2 - 3}{t}. \tag{1.3}$$

On observe que les ensembles de définition de x et y sont $\mathcal{D}_x = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ et $\mathcal{D}_y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Par ailleurs, la courbe ne semble pas admettre de symétrie. On étudie les variations simultanées de x et y en calculant les dérivées :

$$x' = \frac{-6(t-1)}{(t^2-2t)^2} \text{ et } y' = 1 + \frac{3}{t^2}.$$

On en déduit le tableau des variations simultanées.

t	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
x'	+	+	0	-	-
x	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow -3$	$\searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	
y'	+	+	+	+	
y	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow -2$		$0,5 \nearrow +\infty$	

Ce tableau de variations montre l'existence d'une *asymptote horizontale* d'équation $y = \frac{1}{2}$ (lorsque $t \rightarrow 2$), car dans ce cas $x \rightarrow \infty$ et $y \rightarrow \frac{1}{2}$. Il fait apparaître aussi une *asymptote verticale* d'équation $x = 0$ (lorsque $t \rightarrow \pm\infty$), car alors $x \rightarrow 0$ et $y \rightarrow \infty$.

Lorsque $t \rightarrow 0$, x et y tendent tous les deux vers l'infini, on est donc amené à rechercher une *asymptote oblique* éventuelle. Le principe est le même que pour les courbes définies par $y = f(x)$ (Formules (13.6) et (13.7) de *Toutes les mathématiques*, page 147) :

Supposons que $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty$. Pour étudier la branche infinie lorsque $t \rightarrow t_0$, on calcule d'abord

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y}{x} = a. \tag{1.4}$$

Si $a = 0$, on a une branche parabolique de direction Ox .

Si $a = \infty$, on a une branche parabolique de direction Oy .

Si $a \neq 0$ et $a \neq \infty$, on calcule

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (y - ax) = b. \tag{1.5}$$

Si $b \neq \infty$, la courbe admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote oblique lorsque $t \rightarrow t_0$.

Dans l'exemple de la courbe ci-dessus, définie par (1.3), on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 - 3)(t^2 - 2t)}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 - 3)(t - 2)}{3} = 2.$$

Donc $a = 2$ et on calcule ensuite

$$\lim_{t \rightarrow 0} (y - 2x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t^2 - 3}{t} - \frac{6}{t(t - 2)} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 - 2t^2 - 3t}{t(t - 2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - 2t - 3}{t - 2} = \frac{3}{2}.$$

La courbe admet la droite d'équation $y = 2x + \frac{3}{2}$ pour asymptote oblique lorsque $t \rightarrow 0$. On peut alors la tracer, en plaçant les points remarquables avec leurs tangentes, ainsi que les asymptotes, qui servent de guide.

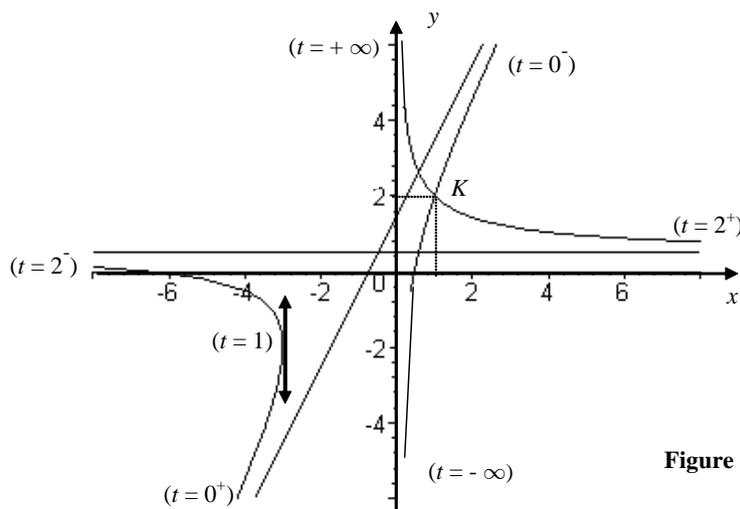


Figure 1.5

Remarque 1.1 On voit apparaître sur la courbe un *point double* K , qui correspond à deux valeurs différentes t et t' du paramètre. Il est possible de calculer ses coordonnées (Exercice 1.11).

1.4 Cycloïdes

Les *cycloïdes* sont des courbes définies par la trajectoire d'un point d'un cercle roulant, soit sur un plan, soit à l'extérieur ou l'intérieur d'autres cercles, soit sur d'autres figures plus compliquées.

a) "La" *cycloïde* est la trajectoire d'un point d'un cercle de rayon R qui roule sans glisser sur un plan horizontal. Soit M ce point à l'instant t . On choisit l'origine O du repère de telle sorte qu'au début de la rotation, le point M soit en O (cercle en pointillés dans la figure 1.6). En notant Ω le centre du cercle à un instant donné, on choisit comme paramètre l'angle

$$t = (\widehat{\vec{\Omega M}, \vec{\Omega H}}). \quad (1.6)$$

La condition de roulement sans glissement se traduit par le fait que la longueur de l'arc de cercle MH est égale à la longueur parcourue sur le sol, c'est-à-dire OH .

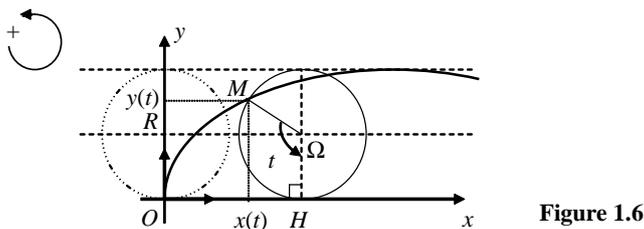


Figure 1.6

Puisque l'angle au centre vaut t , on a donc, en vertu du théorème 11.5 de *Toutes les mathématiques* (page 121) :

$$Rt = OH = x_{\Omega}. \quad (1.7)$$

Par ailleurs, l'angle $(\vec{i}, \vec{\Omega M})$ vaut

$$(\vec{i}, \vec{\Omega M}) = (\vec{i}, \vec{\Omega H}) + (\vec{\Omega H}, \vec{\Omega M}) = \frac{3\pi}{2} - t.$$

En vertu du théorème des projections (Théorème 5.7 de *Toutes les mathématiques*, page 45), il vient

$$\vec{\Omega M} = R \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \vec{i} + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \vec{j} \right] = -R \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \vec{j} \right] = -R \left(\sin t \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j} \right).$$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$\vec{OM} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega M} = (x_{\Omega} \vec{i} + y_{\Omega} \vec{j}) - R (\sin t \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j}) = R(t - \sin t) \vec{i} + R(1 - \cos t) \vec{j}.$$

D'où les coordonnées de M en fonction de t , c'est-à-dire une *équation paramétrique de la cycloïde* :

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t). \quad (1.8)$$

La représentation graphique de la cycloïde peut s'obtenir à partir de cette représentation, ou plus simplement en visualisant le mouvement du point M . Pour $t = 0$, il est en O . Puis, lorsque le cercle a décrit un tour complet, c'est-à-dire lorsque $t = 2\pi$, M revient sur l'axe des x . La distance horizontale parcourue est alors $2\pi R$. La portion de courbe décrite lorsque t varie de 0 à 2π s'appelle une *arche de cycloïde* (Figure 1.7). Elle est symétrique par rapport à la droite verticale $x = \pi R$, son sommet ayant pour ordonnée $2R$ (hauteur maximale du point M). Aux points de l'axe des x d'abscisses $2k\pi R$ ($k \in \mathbb{Z}$), la vitesse s'annule, le point M marque un temps d'arrêt et rebrousse chemin. Un tel point est appelé un *point de rebroussement*. Le calcul de x'' et y'' en ces points montre que la tangente y est verticale (Théorème 1.1).

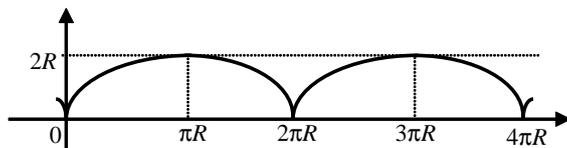


Figure 1.7 : La cycloïde

b) Une *épicicloïde* est la trajectoire du point d'un cercle (C') de rayon R' qui roule sans glisser à l'extérieur d'un autre cercle (C) de rayon R . Une équation paramétrique s'obtient en choisissant un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) centré sur le cercle fixe (C), le paramètre étant

$$t = \widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{O\Omega})}. \tag{1.9}$$

où Ω désigne le centre du cercle mobile (C'). On choisit pour position du point M à $t = 0$ le point A de coordonnées $(R, 0)$. Le cas le plus simple est celui où $R' = R$ (Figure 1.8). On parle dans ce cas d'*épicicloïde à un point de rebroussement*.

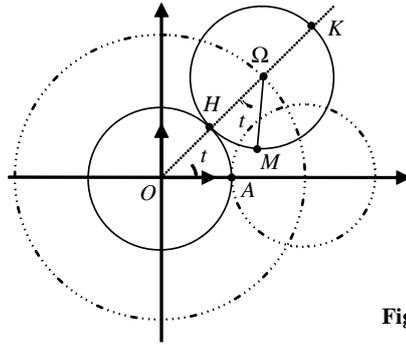


Figure 1.8

La condition de roulement sans glissement se traduit par l'égalité des longueurs des arcs de cercle HA (sur le cercle fixe) et HM (sur le cercle roulant). Comme les rayons des cercles sont égaux, cela signifie que

$$\widehat{(\overrightarrow{\Omega H}, \overrightarrow{\Omega M})} = \widehat{(\overrightarrow{O A}, \overrightarrow{O H})} = t.$$

On en déduit que

$$\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M})} = \widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega K})} + \widehat{(\overrightarrow{\Omega K}, \overrightarrow{\Omega H})} + \widehat{(\overrightarrow{\Omega H}, \overrightarrow{\Omega M})} = 2t + \pi.$$

On a donc

$$\overrightarrow{\Omega M} = R [\cos(2t + \pi) \vec{i} + \sin(2t + \pi) \vec{j}] = -R (\cos 2t \cdot \vec{i} + \sin 2t \cdot \vec{j}).$$

En utilisant la relation de Chasles, il vient

$$\overrightarrow{O M} = \overrightarrow{O \Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = 2R (\cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j}) - R (\cos 2t \cdot \vec{i} + \sin 2t \cdot \vec{j}) = R [(2 \cos t - \cos 2t) \vec{i} + (2 \sin t - \sin 2t) \vec{j}].$$

D'où l'équation paramétrique de l'épicicloïde à un rebroussement :

$$x = R(2 \cos t - \cos 2t) \quad , \quad y = R(2 \sin t - \sin 2t) \tag{1.10}$$

Cette équation est exactement (1.2). L'épicicloïde à un rebroussement n'est autre que la cardioïde.

1.5 Abscisse curviligne, base de Frénet et courbure

La notion d'*abscisse curviligne* généralise la notion d'abscisse sur un axe orienté. Soit une courbe (C) (Figure 1.9). Choisissons arbitrairement une *origine* Ω et un *sens positif* de déplacement sur (C). L'abscisse curviligne s du point M de (C) est définie par

$$s = \pm \widehat{\Omega M}. \tag{1.11}$$

La longueur de l'arc $\widehat{\Omega M}$ est affectée du signe $+$ si on va de Ω à M dans le sens positif, du signe $-$ dans le cas contraire. Lorsque M se déplace dans le sens positif d'une quantité $d\vec{M}$, on a évidemment $ds = \left\| d\vec{M} \right\|$.

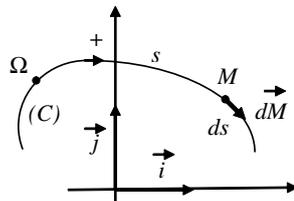


Figure 1.9

Soient maintenant $x = x(t)$ et $y = y(t)$ des fonctions 2 fois dérivables, et soit (C) la courbe paramétrée définie par $x = x(t)$ et $y = y(t)$. On pose

$$\vec{v} = \frac{d\vec{M}}{dt}, \quad v = \|\vec{v}\|, \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Dans l'interprétation cinématique des courbes paramétrées, t représente le temps, le point $M = M(t)$ est mobile en fonction de t , (C) est sa trajectoire, \vec{v} sa vitesse et \vec{a} son accélération. On considère dans ce qui suit que t augmente, c'est-à-dire que $dt > 0$.

On suppose que $M = M(t)$ est un *point régulier* de (C) , c'est-à-dire que $\vec{v}(M) \neq \vec{0}$. On définit le vecteur tangent \vec{T} au point M comme le vecteur normé, colinéaire à \vec{v} et de même sens, et le vecteur normal \vec{N} comme le vecteur normé directement orthogonal à \vec{T} (Figure 1.10).

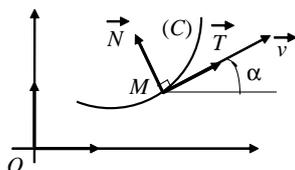


Figure 1.10

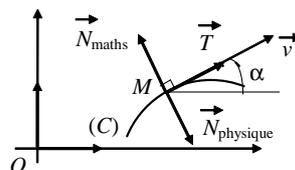


Figure 1.11

Par définition (\vec{T}, \vec{N}) est une base orthonormée directe du plan. Elle s'appelle la *base de Frénet*¹. Il s'agit d'une base *mobile* car elle se déplace avec M .

Posons $\alpha = (\vec{i}, \vec{T})$. Alors $(\vec{i}, \vec{N}) = \alpha + \frac{\pi}{2}$ et

$$\vec{T} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}, \quad \vec{N} = \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \vec{i} + \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \vec{j} = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}.$$

On remarque immédiatement que

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha}. \quad (1.12)$$

Le raisonnement qui conduit à cette formule est général :

Théorème 1.2 *La dérivée d'un vecteur normé (unitaire) par rapport à son angle polaire est le vecteur normé qui lui est directement orthogonal.*

Par exemple, en coordonnées polaires on a

$$\vec{e}_\theta = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}$$

(Formule (10.24), page 107 de *Toutes les mathématiques*).

De même, dériver une seconde fois revient à faire encore tourner de $+\frac{\pi}{2}$. Par conséquent

$$\frac{d\vec{N}}{d\alpha} = -\vec{T} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r. \quad (1.13)$$

1.5.1 Vitesse et accélération dans la base de Frénet

Par définition de la base de Frénet, on a d'abord (Figure 1.10)

$$\vec{v} = v\vec{T}. \quad (1.14)$$

Définissons arbitrairement une origine sur (C) , et orientons (C) dans le sens du déplacement. Notons s l'abscisse curviligne. Puisque $dt > 0$, on a

$$v = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| = \frac{\left\| d\vec{M} \right\|}{dt} = \frac{ds}{dt}. \quad (1.15)$$

¹Dans le cas où (C) est un cercle, la base de Frénet a été également introduite page 110 de *Toutes les mathématiques*.

Pour obtenir l'accélération \vec{a} , on définit le *rayon de courbure* R en M par

$$R = \frac{ds}{d\alpha}. \quad (1.16)$$

On a alors

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{T}) = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{d\alpha} \times \frac{d\alpha}{ds} \times \frac{ds}{dt}.$$

En utilisant (1.12), (1.15) et (1.16), on obtient la formule fondamentale

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}. \quad (1.17)$$

Cette formule généralise la formule (10.34) de *Toutes les mathématiques* (page 110) au cas d'une courbe quelconque. On vérifie (Exercice 1.4) que le rayon de courbure d'un cercle de rayon R est R .

Remarque 1.2 L'inverse $\gamma = \frac{1}{R}$ du rayon de courbure s'appelle la *courbure*.

1.5.2 Calcul pratique du rayon de courbure

Le déterminant d'un système de deux vecteurs du plan ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie pour exprimer leurs composantes (voir l'exercice 1.14 pour la démonstration de ce résultat). Si on travaille dans la base de Frénet (\vec{T}, \vec{N}) , il vient, grâce à (1.14) et (1.17),

$$\det(\vec{v}, \vec{a}) = \begin{vmatrix} v & \frac{dv}{dt} \\ 0 & \frac{v^2}{R} \end{vmatrix} = \frac{v^3}{R}.$$

Il en résulte immédiatement que

$$R = \frac{v^3}{\det(\vec{v}, \vec{a})}. \quad (1.18)$$

En coordonnées cartésiennes, x et y dépendant du paramètre t , et on a donc $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ et $\vec{a} = x''\vec{i} + y''\vec{j}$. La base (\vec{i}, \vec{j}) étant orthonormée directe, (1.18) se traduit par

$$R = \frac{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^3}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}. \quad (1.19)$$

Exemple 1.2 Calculons le rayon de courbure ρ de la cardioïde au point C de paramètre $t = \pi$ (Figure 1.4). Ici, attention aux notations : R désigne le rayon du cercle roulant, voir Section 1.3. On a

$$\begin{cases} x = R(2 \cos t - \cos 2t) & ; & y = R(2 \sin t - \sin 2t) \\ x' = 2R(\sin 2t - \sin t) & ; & y' = 2R(\cos t - \cos 2t) \\ x'' = 2R(2 \cos 2t - \cos t) & ; & y'' = 2R(2 \sin 2t - \sin t) \end{cases}$$

Au point de paramètre $t = \pi$, on a donc $x' = 0$, $y' = -4R$, $x'' = 6R$, $y'' = 0$. Donc le rayon de courbure au point C vaut

$$\rho = \frac{(16R^2)^{\frac{3}{2}}}{24R^2} = \frac{8}{3}R.$$

On notera que, en mathématiques, le vecteur normal \vec{N} est *directement orthogonal* à \vec{T} . En physique, on préfère un vecteur normal \vec{N} tourné *vers l'intérieur* de la courbe.

Si la courbe est convexe, comme dans la figure 1.10, c'est le cas et le rayon de courbure mathématique est *positif*.

Si la courbe est concave, comme dans la figure 1.11, \vec{N} est tourné vers l'extérieur de la courbe et le rayon de courbure mathématique est *négatif*. En physique, on remplace alors \vec{N} par $\vec{\eta} = -\vec{N}$ et prend la *valeur absolue* du rayon de courbure pour avoir un rayon positif. En physique la formule (1.17) devient donc

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{\eta}, \quad \text{avec } R = \frac{v^3}{|\det(\vec{v}, \vec{a})|}. \quad (1.20)$$

1.6 Longueurs et surfaces

a) Soit un arc de courbe \widehat{AB} (Figure 1.12). On considère un point M qui se déplace le long de la courbe de A à B , par déplacements infinitésimaux \overrightarrow{dM} .

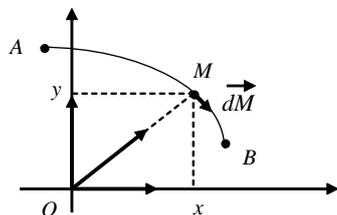


Figure 1.12

Chacun de ces déplacements a une longueur égale à $\|\overrightarrow{dM}\|$, et la longueur totale L de l'arc \widehat{AB} est évidemment la somme de ces longueurs infinitésimales. Donc :

$$L = \int_A^B \|\overrightarrow{dM}\|. \quad (1.21)$$

Si on travaille en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{dM} = dx \vec{i} + dy \vec{j}. \quad (1.22)$$

Il en résulte immédiatement que

$$L = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (1.23)$$

Exemple 1.3 Calculer la longueur de l'arche de cycloïde (Section 1.4), définie par la représentation paramétrique

$$x = R(t - \sin t) ; y = R(1 - \cos t).$$

Le déplacement du point M est dû à la variation du paramètre t , qui pour une arche de cycloïde varie entre 0 et 2π . Lorsque t varie de dt , x varie de dx et y varie de dy , et on a

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = R(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = y'(t) = R \sin t.$$

On en déduit que $dx = R(1 - \cos t) dt$ et $dy = R \sin t dt$. Puisque t croît en variant de 0 à 2π , on a $dt > 0$, donc

$$\|\overrightarrow{dM}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = R\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt.$$

En développant et en utilisant la formule $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$, il vient

$$\|\overrightarrow{dM}\| = R\sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2R\sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2R \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt.$$

Puisque t varie entre 0 et 2π , $\frac{t}{2}$ varie entre 0 et π et $\sin \frac{t}{2} \geq 0$. On peut donc supprimer la valeur absolue, et la longueur de l'arche de cycloïde vaut

$$L = \int_{t=0}^{t=2\pi} \|\overrightarrow{dM}\| = 2R \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4R \left[-\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8R.$$

Ce résultat peut s'interpréter de la façon suivante : lorsqu'un cercle de rayon R roule sans glisser sur un plan, la longueur totale parcourue par un point de ce cercle lors d'un tour complet vaut 8 fois le rayon du cercle.

b) Soit maintenant une courbe fermée (C), sans point double (Figure 1.13). Nous faisons se déplacer le point M de A à B le long de la partie inférieure (C_1) de (C), puis de B vers A le long de la partie supérieure (C_2) de (C). La surface sous la courbe (C_1) vaut

$$S_1 = \int_{(C_1)} y dx.$$

La surface sous (C_2) vaut

$$S_2 = - \int_{(C_2)} y dx.$$

Le signe $-$ provient du fait que dans ce cas $dx < 0$. La surface intérieure à la courbe (C) vaut donc

$$S = S_2 - S_1 = - \left(\int_{(C_1)} y dx + \int_{(C_2)} y dx \right).$$

On notera que, lorsque le point M parcourt (C_1) puis (C_2) , il parcourt toute la courbe fermée (C) dans le sens trigonométrique. On a donc

$$S = - \oint_{\vec{C}} y dx. \quad (1.24)$$

Le cercle placé sur l'intégrale indique que la courbe orientée (\vec{C}) est fermée. La surface S est donnée par une *intégrale curviligne*².

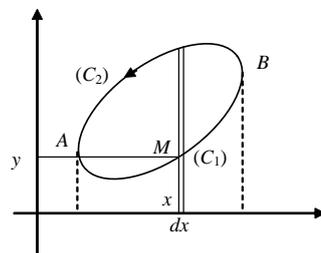


Figure 1.13

Exemple 1.4 Trouver la surface intérieure à la cardioïde, d'équation paramétrique (1.2). Pour parcourir toute la courbe, on fait varier t de 0 à 2π . En vertu de (1.24) et (1.2), on a donc

$$S = - \oint_{\vec{C}} y dx = 2R^2 \int_{t=0}^{t=2\pi} (2 \sin t - \sin 2t) (\sin t - \sin 2t) dt.$$

En développant, il vient

$$\begin{aligned} S &= 2R^2 \int_0^{2\pi} (2 \sin^2 t - 3 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t) dt = 2R^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos t - 6 \sin^2 t \cos t + \frac{1}{2} (1 - \cos 4t) \right) dt \\ &= 2R^2 \left[t - \sin t - 2 \sin^3 t + \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \right]_0^{2\pi} = 6\pi R^2. \end{aligned}$$

Remarque 1.3 Si la courbe (C) est parcourue dans le sens contraire du sens trigonométrique, il est clair que l'intégrale de la formule (1.24) donne l'opposé de la surface S , c'est-à-dire un nombre négatif. On rencontre ce résultat en thermodynamique, lorsqu'on utilise un *diagramme de Clapeyron*.

Exercices

Les basiques

Exercice 1.1 (A,E) Les courbes de Lissajous sont les courbes définies par des équations paramétriques de la forme

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Soit la courbe de Lissajous d'équation paramétrique

$$x = \sin 2t, \quad y = 2 \sin t.$$

²Pour plus de détails sur les intégrales curvilignes, voir le supplément *Calcul différentiel et intégral pour la physique*, Section 1.5. La formule (1.24) ci-dessus est un cas particulier de la formule de Green-Riemann, Section 2.5, Remarque 2.2 du supplément *Calcul différentiel et intégral pour la physique*.

- 1) Réduire l'intervalle d'étude en étudiant la périodicité et les effets des transformations $t \leftarrow t + \pi$ et $t \leftarrow -t$.
- 2) Etudier les variations simultanées de x et y sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- 3) Tracer la courbe. On donne $\sqrt{2} \simeq 1,4$.
- 4) Eliminer t pour trouver son équation cartésienne, c'est-à-dire une relation directe entre x et y .
- 5) Trouver la surface S intérieure à la courbe.

Exercice 1.2 (A,B) Soit (C) définie par

$$x = \frac{t^3}{1+t^2}, \quad y = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

- 1) Montrer que (C) est symétrique par rapport à (Oy) en calculant $x(-t)$ et $y(-t)$.
- 2) Etudier les variations simultanées de x et y sur $[0, +\infty[$.
- 3) Déterminer la tangente à (C) au point de paramètre $t = 0$. Comment nomme-t-on un tel point ?
- 4) Tracer la courbe (C) .
- 5) Montrer que l'équation cartésienne de (C) est $yx^2 + y^3 - x^2 = 0$.

Exercice 1.3 (A) On considère la courbe de Lissajous d'équation

$$x = 2(\cos t + \sin t), \quad y = 3(\cos 2t - \sin 2t).$$

- 1) Ecrire x et y sous la forme $A \cos(\omega t + \varphi)$.
- 2) Etudier l'effet des transformations $t \leftarrow t + 2\pi$ et $t \leftarrow t + \pi$.
- 3) Etudier les variations simultanées de x et y lorsque t varie de 0 à π (utiliser la calculatrice pour les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variations).
- 4) Trouver le point d'intersection avec l'axe des y .
- 5) Construire la courbe dans un repère orthonormé.
- 6) Déterminer son équation cartésienne.

Exercice 1.4 (C) Montrer que le rayon de courbure en un point quelconque d'un cercle de rayon R vaut R .

Exercice 1.5 (C) Trouver le rayon de courbure au point d'abscisse $x = 0$ de la parabole d'équation $y = x^2$.

Exercice 1.6 (C) Trouver le rayon de courbure au point d'abscisse $x = 0$ de la chaînette d'équation $y = \operatorname{ch} x$.

Exercice 1.7 (D) Un mobile se déplace suivant la loi horaire $x = \sin 2t$, $y = 2 \sin t$. Sa trajectoire a été étudiée dans l'exercice 1.1.

- 1) Calculer à l'instant t les composantes des vecteurs \vec{T} et \vec{N} de sa base de Frénet.
- 2) Exprimer à l'instant t son accélération \vec{a} dans la base de Frénet.

Exercice 1.8 (E) Calculer la longueur totale de la cardioïde, d'équation paramétrique (1.2).

Exercice 1.9 (E) Calculer la longueur de l'arc de chaînette $y = \operatorname{ch} x$ entre les points d'abscisses $-b$ et b ($b > 0$).

Exercice 1.10 (E) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que

$$\int \sqrt{1 + \alpha^2 x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{1 + \alpha^2 x^2} + \frac{1}{\alpha} \ln \left(\alpha x + \sqrt{1 + \alpha^2 x^2} \right) \right).$$

En déduire la longueur de l'arc de parabole $y = ax^2$ compris entre l'origine O et le point A d'abscisse 1.

Les techniques

Exercice 1.11 Trouver les coordonnées du point double K de la courbe étudiée dans la section 1.3.

Exercice 1.12 (Folium de Descartes) Soit la courbe (C) définie par

$$x = \frac{3t}{1+t^3} \quad \text{et} \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}. \quad (1.25)$$

- 1) Comparer $x(\frac{1}{t})$ et $y(\frac{1}{t})$ à $x(t)$ et $y(t)$. En déduire que (C) admet un axe de symétrie, que l'on précisera.

- 2) Etudier les variations simultanées de x et y lorsque t varie entre -1 et 1 .
- 3) Trouver l'asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}) .
- 4) Construire la courbe (\mathcal{C}) dans un repère orthonormé.
- 5) Déterminer l'équation cartésienne de (\mathcal{C}) .

Exercice 1.13 Un cercle de rayon $\frac{R}{2}$ roule sans glisser à l'extérieur d'un cercle de rayon R .

- 1) Démontrer que l'équation paramétrique de la trajectoire d'un point M de ce cercle peut s'écrire

$$x = \frac{R}{2}(3 \cos t - \cos 3t), \quad y = \frac{R}{2}(3 \sin t - \sin 3t). \quad (1.26)$$

- 2) Construire la courbe d'équation paramétrique (1.26), qui s'appelle *épicycloïde à deux points de rebroussement* (ou *néphroïde*).
- 3) Calculer la longueur totale de la néphroïde.
- 4) Calculer la surface intérieure à la néphroïde.

Exercice 1.14 Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

Démontrer que $\det(\vec{u}, \vec{v})$ ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie pour le calculer.

Exercice 1.15 Soit la courbe (\mathcal{C}) définie par l'équation paramétrique

$$x = t + \frac{1}{t}, \quad y = t + \frac{1}{t-1}.$$

- 1) Déterminer les ensembles de définition de x et y .
- 2) Etudier les variations simultanées de x et y .
- 3) Déterminer l'équation de l'asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}) .
- 4) Construire la courbe (\mathcal{C}) dans un repère orthonormé.

Chapitre 2

Coniques

Les coniques (ellipse, parabole et hyperbole) sont les courbes du plan les plus simples après les droites et les cercles. On les rencontre dans de nombreux problèmes, notamment dans l'étude des mouvements à force centrale. Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :

- A. Connaître les principaux éléments qui définissent une ellipse (axes, excentricité, foyers, propriété bifocale, paramètre) et savoir tracer une ellipse donnée par son équation cartésienne.
- B. Connaître les principaux éléments qui définissent une hyperbole (axes, excentricité, foyers, propriété bifocale, paramètre) et savoir tracer une ellipse donnée par son équation cartésienne.
- C. Connaître l'équation polaire des coniques.

2.1 Ellipse

2.1.1 Définition de l'ellipse

Soient a et b deux nombres réels, avec $0 < b \leq a$. Une *ellipse* (E) est l'image du cercle (C) de centre O de rayon a par *aplatissement* (le terme mathématique exact est *affinité*) vers Ox de rapport $\frac{b}{a}$. Cela signifie que, pour chaque point $N(X, Y)$ du cercle, on obtient un point $M(x, y)$ de l'ellipse en posant $x = X$ et $y = \frac{b}{a}Y$. La figure 2.1 montre l'ellipse obtenue par aplatissement vers Ox de rapport $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire lorsque $b = \frac{1}{2}a$. Pour l'ellipse de la figure 2.2, l'aplatissement est de $\frac{2}{3}$.

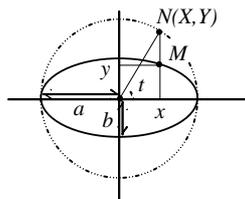


Figure 2.1

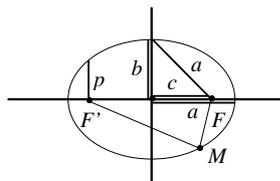


Figure 2.2

Si nous notons t l'angle entre l'axe des x et le vecteur \overrightarrow{ON} (Figure 2.1), le théorème des projections¹ nous dit que $X = a \cos t$ et $Y = a \sin t$. Puisque $x = X$ et $y = \frac{b}{a}X$ par l'affinité d'axe Ox , on voit que

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t. \quad (2.1)$$

Il s'agit de l'*équation paramétrique* de l'ellipse (E). Lorsque le paramètre t varie (ici le paramètre est un angle), le point N se déplace sur le cercle (C), et le point M se déplace sur l'ellipse (E). Voir @nimation sur notre site Internet. En éliminant le paramètre t par la relation $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, on obtient une relation directe entre x et y , c'est-à-dire l'*équation cartésienne* de (E) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.2)$$

¹Théorème 5.1, page 41 de *Toutes les mathématiques*.

L'axe Ox s'appelle le *grand axe* de l'ellipse. Il correspond à la plus grande longueur $2a$. L'autre axe de symétrie, l'axe Oy , s'appelle le *petit axe*. Il correspond à la plus petite valeur $2b$. Le point O est le *centre* de l'ellipse. On remarque que, si $a = b$, l'ellipse est un cercle.

Remarque 2.1 Par souci de simplification de l'exposé, on introduit l'ellipse centrée en O . Bien entendu, comme le cercle, l'ellipse n'est pas nécessairement centrée en O . Par exemple, par analogie avec l'équation cartésienne d'un cercle, on voit que l'équation cartésienne

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$$

est celle d'une ellipse de centre $\Omega(1, 5)$, avec $a = 3$ et $b = 2$. De même, il se peut tout à fait que l'ellipse ait son grand axe vertical. Par exemple, l'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

est celle d'une ellipse de centre O , mais on note toujours a le plus grand des nombres figurant sous x et y . Donc ici $a = 4$ et $b = 3$. Le plus grand étant placé sous y , les rôles de x et y sont inversés : il s'agit donc d'une ellipse de grand axe vertical de centre O .

Remarque 2.2 La surface S intérieure à l'ellipse d'équation (2.2) vaut

$$S = \pi ab. \quad (2.3)$$

Voir l'exercice 2.13 pour la démonstration de (2.3). Si $a = b = R$, l'ellipse est un cercle, et on retrouve la formule pour la surface du cercle $S = \pi R^2$.

2.1.2 Foyers et excentricité

Les *foyers* de l'ellipse (E) sont les points $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, où

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ ou encore } a^2 = b^2 + c^2. \quad (2.4)$$

Cette définition se retient grâce à la figure 2.2. Les foyers F et F' sont situés sur le grand axe Ox , symétriques par rapport au centre O de l'ellipse. La relation $a^2 = b^2 + c^2$ n'est autre que le théorème de Pythagore : pour obtenir le foyer F , on reporte à l'aide du compas la longueur a à partir du sommet du petit axe.

L'*excentricité* de l'ellipse est définie par

$$e = \frac{c}{a}. \quad (2.5)$$

Si $e = 0$, alors l'ellipse est un cercle, car $e = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow a = b$ en vertu de (2.4). De plus, (2.4) montre que $c < a$, et par conséquent $e < 1$. Donc l'excentricité de l'ellipse vérifie

$$0 \leq e < 1. \quad (2.6)$$

Lorsque e augmente de 0 à 1, c augmente également de 0 à a . Les foyers ont donc tendance à s'éloigner du centre (d'où le terme d'excentricité) et l'ellipse à s'aplatir. Voir @nimation sur notre site Internet.

2.1.3 Propriété bifocale et paramètre

La *propriété bifocale* exprime que la somme des distances de tout point M de l'ellipse aux foyers est une constante, égale à $2a$ (voir Figure 2.2). En d'autres termes, pour tout point M de (E),

$$FM + F'M = 2a. \quad (2.7)$$

La démonstration de la propriété bifocale est un exercice intéressant de géométrie analytique (voir Exercice 2.10). La propriété bifocale permet également de tracer l'ellipse grâce à une ficelle tendue autour de deux piquets fixes qui sont placés à ses foyers. On parle alors de l'*ovale des jardiniers*. Voir l'@nimation sur notre site Internet.

Le *paramètre de l'ellipse* (à ne pas confondre avec le paramètre t qui sert à définir la représentation paramétrique) est la distance p entre un des foyers et le point de l'ellipse obtenu quand on remonte perpendiculairement au grand axe (Figure 15.2). A partir de la propriété bifocale (2.7), on démontre (voir Exercice 2.11) que

$$p = \frac{b^2}{a}. \quad (2.8)$$

2.2 Ellipse et parabole en coordonnées polaires

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On appelle *conique* toute courbe (C) d'équation polaire

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}. \quad (2.9)$$

où $p > 0$ et $e \geq 0$. Une telle équation se rencontre notamment dans l'étude des mouvements à force centrale. Si $e = 0$, alors $r = p$ est une constante, donc (C) est le cercle de centre O et de rayon p .

Théorème 2.1 Soient $p > 0$ et $0 < e < 1$ donnés. Alors l'équation polaire

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

est celle d'une ellipse dont un des foyers est O , de grand axe Ox , d'excentricité e et de paramètre p .

Démonstration Déterminons l'équation cartésienne de (C) à partir de la figure 2.3.

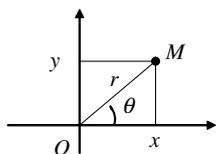


Figure 2.3

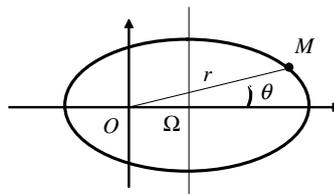


Figure 2.4

On peut écrire

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \Leftrightarrow r - er \cos \theta = p.$$

Puisque $x = r \cos \theta$, il vient $r = p + ex$. En élevant au carré, on obtient $r^2 = p^2 + 2epx + e^2x^2$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = p^2 + 2ex + e^2x^2$. D'où l'équation cartésienne de (C) :

$$(1 - e^2)x^2 - 2epx + y^2 = p^2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{2ep}{1 - e^2}x + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{1 - e^2}.$$

On procède alors comme pour les équations de cercles (Exemple 7.4, page 72 de *Toutes les mathématiques*), en faisant apparaître des débuts de développements de carrés. L'équation cartésienne de (C) s'écrit

$$\left(x - \frac{ep}{1 - e^2}\right)^2 - \frac{e^2p^2}{(1 - e^2)^2} + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{1 - e^2},$$

c'est-à-dire encore

$$\left(x - \frac{ep}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Finalement, l'équation cartésienne de (C) est

$$\frac{\left(x - \frac{ep}{1 - e^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{1 - e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}\right)^2} = 1.$$

On voit donc que (C) est une ellipse de centre $\Omega\left(\frac{ep}{1-e^2}, 0\right)$, avec

$$\Omega\left(\frac{ep}{1-e^2}, 0\right), \quad a = \frac{p}{1-e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (2.10)$$

On en déduit immédiatement que

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{ep}{1-e^2}. \quad (2.11)$$

Ceci prouve bien que (C) est une ellipse de grand axe Ox , de foyer O (Figure 2.4). L'excentricité est $\frac{c}{a} = e$, et le paramètre est p (prendre $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans l'équation polaire).

Dans le cas où $e = 1$, on a le résultat suivant :

Théorème 2.2 *L'équation polaire*

$$r = \frac{p}{1 - \cos \theta}$$

est celle d'une parabole d'axe Ox . Le point O s'appelle le foyer de la parabole, et le nombre p son paramètre.

Démonstration Comme dans le cas où $e < 1$, on peut écrire

$$r = \frac{p}{1 - \cos \theta} \Leftrightarrow r - r \cos \theta = p \Leftrightarrow r = p + x.$$

En élevant au carré, il vient $x^2 + y^2 = p^2 + 2px + x^2$, c'est-à-dire

$$x = \frac{1}{2p}(y^2 - p^2).$$

Par conséquent x est une fonction du second degré de y . La conique (C) est donc une parabole (Section 7.4 de *Toutes les mathématiques*) d'axe Ox . Son sommet A s'obtient en faisant $y = 0$, il a donc pour abscisse $-\frac{1}{2}p$ (Figure 2.5).

Remarque 2.3 L'équation générale en polaires d'une conique de foyer O est en fait

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (2.12)$$

En effet, remplacer θ par $\theta - \theta_0$ revient simplement à prendre la droite d'angle polaire θ_0 comme nouvelle origine des angles (voir par exemple la figure 2.6 pour le cas d'une ellipse).

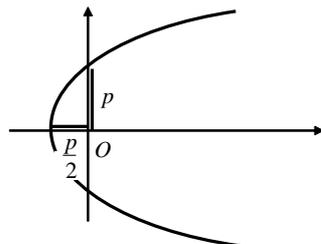


Figure 2.5

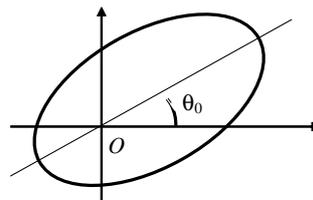


Figure 2.6

Remarque 2.4 Dans le cas où $e > 1$, la conique est une *hyperbole*, comme nous allons le voir dans la section suivante.

2.3 Hyperbole

2.3.1 Définition de l'hyperbole

Soient a et b deux nombres réels positifs². Nous définissons l'*hyperbole* (H) de paramètres a et b par son équation cartésienne réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.13)$$

²On ne suppose pas ici que $b < a$.

On notera l'analogie de cette équation avec celle de l'ellipse

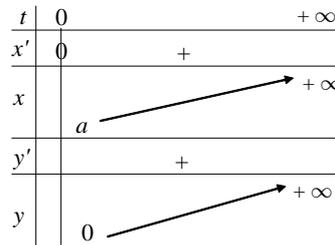
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Comme l'ellipse, l'hyperbole (H) admet Ox et Oy comme axes de symétrie, et O comme centre de symétrie. A l'aide de la relation $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$ (Théorème 12.7 de *Toutes les mathématiques*, page 135), on voit que, pour $x \geq 0$, l'hyperbole (H) d'équation cartésienne (2.13) admet la représentation paramétrique :

$$x = a \text{ch } t, \quad y = b \text{sh } t \tag{2.14}$$

On notera que la représentation paramétrique ne permet de décrire que les points de l'hyperbole d'abscisse positive, car $\text{ch } t \geq 0$ pour tout t réel.

La représentation paramétrique va nous donner l'allure de l'hyperbole. On fait varier t entre 0 et $+\infty$, car le changement $t \leftarrow -t$ correspond à la symétrie par rapport à Ox . On a $x' = a \text{sh } t$ et $y' = b \text{ch } t$. D'où les variations simultanées de x et y :



Au point de paramètre $t = 0$, on a une tangente verticale. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, on a une branche infinie. Pour déterminer sa nature, on calcule d'abord

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} \text{th } t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{b(e^{2t} - 1)}{a(e^{2t} + 1)} = \frac{b}{a}.$$

On calcule ensuite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(y - \frac{b}{a}x \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [b(\text{sh } t - \text{ch } t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-be^{-t}) = 0.$$

Donc la droite d'équation

$$y = \frac{b}{a}x$$

est asymptote oblique à l'hyperbole. En utilisant les symétries par rapport à Ox et Oy , on obtient sa représentation graphique (Figure 2.7).

Remarque 2.5 Par analogie avec le cas du cercle et de l'ellipse, on voit que la forme générale de l'équation cartésienne d'une hyperbole dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées est

$$\frac{(x - x_\Omega)^2}{a^2} - \frac{(y - y_\Omega)^2}{b^2} = \pm 1. \tag{2.15}$$

Cette hyperbole est centrée en $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$. Si le second membre vaut -1 , les rôles de x et y sont inversés et l'hyperbole se présente comme dans la figure 2.8.

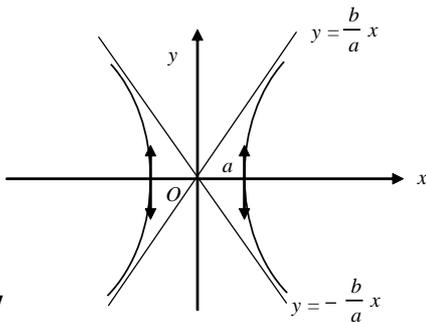


Figure 2.7

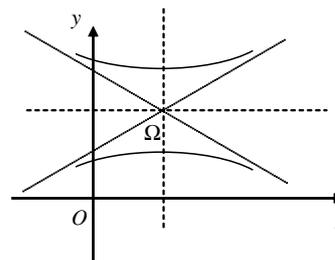


Figure 2.8

2.3.2 Foyers et excentricité

Revenons à l'équation réduite (2.13). On définit la *demi distance focale* c de l'hyperbole par

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.16)$$

et les *foyers* F et F' comme les points de coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$. On retiendra que (2.16) s'écrit aussi $c^2 = a^2 + b^2$, ce qui revient au théorème de Pythagore. Comme le coefficient directeur de l'asymptote oblique est $\frac{b}{a}$, les longueurs a et b peuvent s'interpréter comme indiqué sur la figure 2.9. Pour obtenir géométriquement les foyers de l'hyperbole, on reportera au compas la longueur c à partir du centre O .

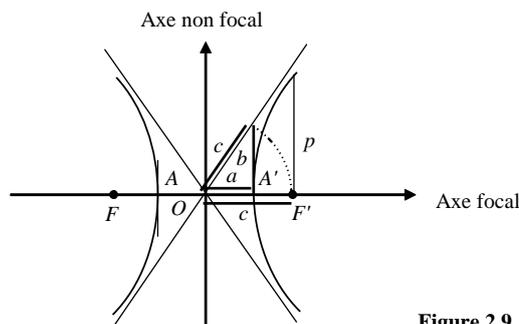


Figure 2.9

Comme pour l'ellipse, l'*excentricité* e de l'hyperbole est définie par

$$e = \frac{c}{a}. \quad (2.17)$$

Puisque $c = \sqrt{a^2 + b^2} > a$, dans le cas de l'hyperbole on a $e > 1$.

2.3.3 Propriétés bifocale et paramètre

La propriété bifocale de l'hyperbole exprime que la différence des distances d'un point M aux foyers F et F' est une constante. Plus précisément, *pour tout point M de l'hyperbole (H), on a*

$$|FM - F'M| = 2a \quad (2.18)$$

Cette relation est à comparer à la propriété bifocale de l'ellipse (2.7). Voir l'exercice 2.12 pour la démonstration.

Le paramètre p de l'hyperbole (à ne pas confondre avec le paramètre t qui sert à définir la représentation paramétrique) est la distance entre un des foyers et le point de l'hyperbole obtenu quand on remonte perpendiculairement à l'axe focal, c'est-à-dire l'axe qui porte les foyers (voir Figure 2.9). Comme pour l'ellipse, on démontre que

$$p = \frac{b^2}{a}. \quad (2.19)$$

Le tableau ci-dessous résume les propriétés comparées de l'ellipse et de l'hyperbole.

	Ellipse	Hyperbole
Equation réduite	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Représentation graphique	Figure 2.2	Figure 2.9
Foyers	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{a}$
Propriété bifocale	$FM + F'M = 2a$	$ FM - F'M = 2a$
Paramètre	$p = \frac{b^2}{a}$	$p = \frac{b^2}{a}$

2.3.4 Hyperbole en coordonnées polaires

Le théorème suivant complète la description des coniques définies par leur équation polaire (Section 2.2).

Théorème 2.3 La conique (C) d'équation polaire

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}. \quad (2.20)$$

où $p > 0$ et $e > 1$, est une hyperbole dont un des foyers est O , d'axe focal Ox , d'excentricité e et de paramètre p .

Démonstration Voir exercice 2.14.

2.4 Tangente en un point d'une ellipse ou d'une hyperbole

Théorème 2.4 La tangente (T) en un point M de l'ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$ (Figure 2.10).

Démonstration Dans la propriété bifocale (2.7), le premier membre est une fonction de t (paramètre du point M), tandis que le second membre est une constante. En dérivant par rapport à t , on a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} (\|\overrightarrow{FM}\|) + \frac{d}{dt} (\|\overrightarrow{F'M}\|) = \frac{d}{dt} (\sqrt{\overrightarrow{FM}^2}) + \frac{d}{dt} (\sqrt{\overrightarrow{F'M}^2}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\overrightarrow{FM}^2}} \frac{d}{dt} (\overrightarrow{FM}^2) + \frac{1}{2\sqrt{\overrightarrow{F'M}^2}} \frac{d}{dt} (\overrightarrow{F'M}^2) \quad \text{car } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}. \end{aligned}$$

Or on sait³ que pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on a $(\vec{u} \cdot \vec{v})' = \vec{u}' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}'$, d'où $(\vec{u}^2)' = 2\vec{u} \cdot \vec{u}'$. Ainsi

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{\overrightarrow{FM}^2}} \left(2\overrightarrow{FM} \cdot \frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} \right) + \frac{1}{2\sqrt{\overrightarrow{F'M}^2}} \left(2\overrightarrow{F'M} \cdot \frac{d\overrightarrow{F'M}}{dt} \right) = \frac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|} \cdot \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} + \frac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|} \cdot \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} \quad (2.21)$$

car les points F et F' sont fixes et par conséquent

$$\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{FO}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{0} + \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}.$$

Introduisons maintenant les vecteurs normés

$$\vec{U} = \frac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|} \quad \text{et} \quad \vec{V} = -\frac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|}.$$

Alors (2.21) s'écrit

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} \cdot \vec{U} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} \cdot \vec{V}.$$

Par définition du produit scalaire, il vient $\cos \alpha = \cos \beta$ (Figure 2.10).

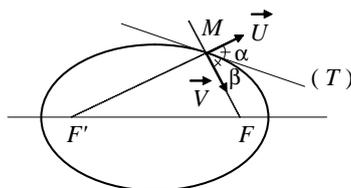


Figure 2.10

Donc (T) est la bissectrice⁴ de l'angle (\vec{U}, \vec{V}) , c'est-à-dire la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$.

³Remarque 10.4, page 108 de *Toutes les mathématiques*

⁴Rappelons ici que $d\overrightarrow{M}/dt$ est un vecteur directeur de (T) .

Théorème 2.5 La tangente (T) en un point M de l'hyperbole est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$ (Figure 2.11).

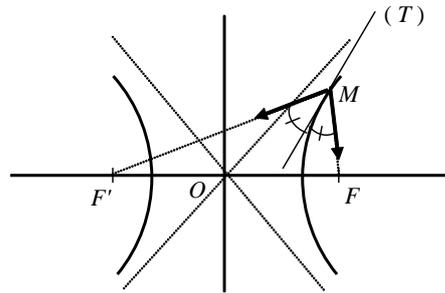


Figure 2.11

Démonstration : Elle est analogue à celle du théorème 2.4.

2.5 Sections coniques

Considérons un cône de révolution (Γ) (Figures 2.12, 2.13, 2.14). Ce cône s'obtient à partir d'une droite (D) , appelée *génératrice* du cône, qui tourne autour du sommet Ω de (Γ) en formant un angle constant α avec l'axe du cône.

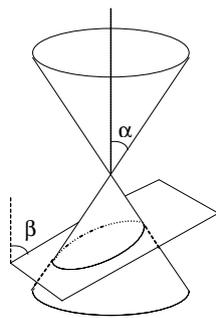


Figure 2.12

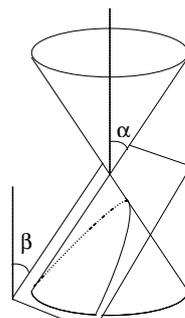


Figure 2.13

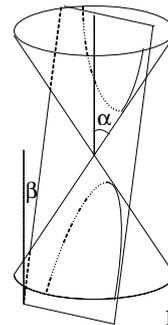


Figure 2.14

Le but de ce qui suit est de montrer que l'intersection (C) d'un cône de révolution (Γ) et d'un plan (\mathcal{P}) ne passant pas par le sommet du cône est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, d'où le terme de *conique*. La nature de la conique (C) dépend de l'angle de coupe β que fait le plan (\mathcal{P}) avec le plan horizontal :

- Si $\beta > \alpha$, alors (C) est une *ellipse* (Figure 2.12). En particulier, si $\beta = \frac{\pi}{2}$, c'est un cercle.
- Si $\beta = \alpha$, ce qui signifie que (\mathcal{P}) est parallèle à une génératrice du cône, (C) est une *parabole* (Figure 2.13).
- Si $\beta < \alpha$, alors la section est une *hyperbole* (Figure 2.14).

Considérons donc un plan (\mathcal{P}) qui coupe un cône de révolution (Γ) . On suppose que (\mathcal{P}) ne passe pas par le sommet Ω de (Γ) . Soit (C) la section de (Γ) par (\mathcal{P}) . Soit Σ la sphère intérieure tangente à (Γ) et tangente à (\mathcal{P}) en F (Figure 2.15). L'ensemble des points de contact de Σ et (Γ) est un cercle horizontal, qui définit un plan (\mathcal{P}') , lui aussi horizontal. Soit M un point de (C) . La génératrice (ΩM) coupe le cercle précédent en K . On note \mathcal{D} la droite d'intersection de (\mathcal{P}) et (\mathcal{P}') , et L et H les projections orthogonales respectives de M sur (\mathcal{P}') et \mathcal{D} .

Nous allons établir une relation très simple entre MF et MH . D'abord, si on travaille dans le plan (FMK) (Figure 2.16), on voit que les droites (MK) et (MF) sont tangentes au cercle (Σ') intersection de (Σ) et de (FMK) . Donc

$$MF = MK. \tag{2.22}$$

Ensuite, dans le plan vertical (MLK) , l'angle α entre la verticale et la génératrice (MK) est constant, puisque (Γ) est un cône de révolution. Donc (voir Figure 2.17)

$$ML = MK \cdot \cos \alpha = MF \cdot \cos \alpha. \tag{2.23}$$

Enfin, dans le plan vertical (MLH) , on a $ML = MH \cdot \cos \beta$, où β est l'angle entre le plan (\mathcal{P}) et la verticale (Figure 2.18).

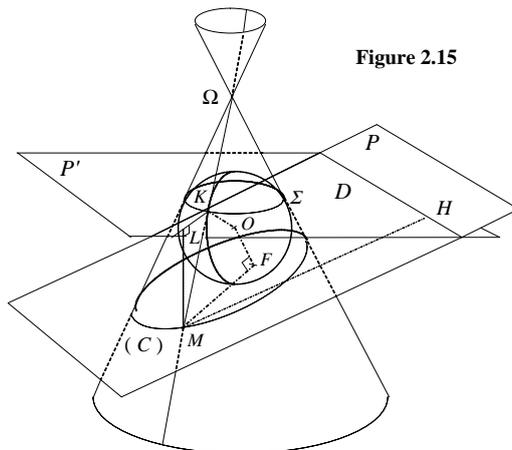


Figure 2.15

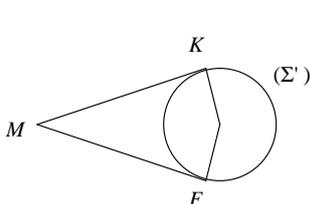


Figure 2.16 : dans le plan (FMK)

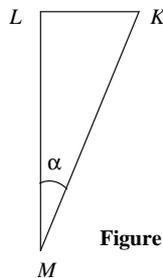


Figure 2.17 : dans le plan (MLK)

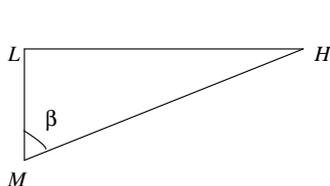


Figure 2.18 : dans le plan (MLH)

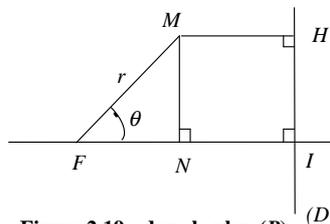


Figure 2.19 : dans le plan (\mathcal{P})

En reportant dans (2.23), il vient donc

$$MF = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} MH \tag{2.24}$$

Interprétons maintenant cette relation dans le plan (\mathcal{P}) . Posons

$$e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}. \tag{2.25}$$

Alors la relation (2.24) exprime que la section (C) est l'ensemble des points M du plan (\mathcal{P}) tels que le rapport des distances au point fixe F et à la droite (\mathcal{D}) soit constant et égal à e (Figure 2.19). Soit I la projection orthogonale de F sur (\mathcal{D}) . Posons $p = eFI$. La relation (2.24) s'écrit $MF = eMH$ et se traduit par

$$r = eIN = e(FI - FN) = p - er \cos \theta.$$

Il en résulte que (C) a pour équation polaire, relativement au point F ,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}. \tag{2.26}$$

Ainsi la section du cône de révolution (Γ) par un plan (\mathcal{P}) ne passant pas par son sommet est une conique, c'est-à-dire une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

- Si $e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} < 1$, c'est-à-dire si $\beta > \alpha$, la (section) conique est une ellipse.

- Si $e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = 1$, c'est-à-dire si $\beta = \alpha$, la (section) conique est une *parabole*.
- Si $e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} > 1$, c'est-à-dire si $\beta < \alpha$, alors la (section) conique est une *hyperbole*.

Notons que nous avons démontré, au passage, le théorème suivant :

Théorème 2.6 Soit F un point du plan, et (D) une droite ne passant pas par F . Soit $e \in \mathbb{R}_+^*$. L'ensemble des points M du plan qui vérifient

$$MF = eMH \quad (2.27)$$

où H désigne la projection orthogonale de M sur (D) , est une conique (C) de foyer F et d'excentricité e . La droite (D) s'appelle la directrice de la conique (C) .

2.6 Tangente en un point de la parabole

Lorsque β diminue (Figure 2.12) et tend vers α , le deuxième foyer de l'ellipse a tendance à s'éloigner pour atteindre l'infini lorsque e devient égal à 1, c'est-à-dire lorsque l'ellipse devient la parabole.

On peut donc considérer qu'une parabole est une ellipse dont le deuxième foyer est rejeté à l'infini.

Ainsi la tangente (T) au point M de la parabole est-elle la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FM\infty}$ (Figure 2.20). Il en résulte que la normale (N) à la courbe au point M est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FM\infty}$.

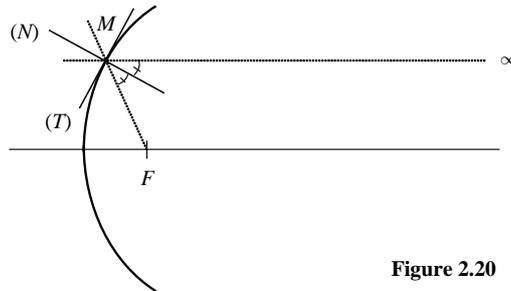


Figure 2.20

Cette propriété a de nombreuses applications pratiques. Par exemple, dans l'*antenne parabolique*, les ondes électromagnétiques qui arrivent parallèles à l'axe se réfléchissent de telle sorte qu'elles passent toutes par le foyer F .

Exercices

Les basiques

Exercice 2.1 (A) Construire les deux ellipses d'équations

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Dans chaque cas, on fera figurer les sommets et les foyers, et on calculera l'excentricité e et le paramètre p .

Exercice 2.2 (A) 1) En procédant comme pour les équations de cercles, montrer que l'équation

$$x^2 + 4x + 4y^2 = 0$$

est celle d'une ellipse, dont on déterminera le centre, les sommets, les foyers et l'excentricité.

2) Même question avec l'équation cartésienne $9x^2 + y^2 - 2y = 8$.

Exercice 2.3 (A) Trouver l'équation cartésienne de l'ensemble (Γ) des points du plan complexe dont l'affixe $z = x + iy$ vérifie

$$10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4.$$

En déduire que (Γ) est une ellipse que l'on construira, après avoir calculé ses foyers, son excentricité et son paramètre.

Exercice 2.4 (A) On donne deux points distincts du plan, F et F' . Construire à la règle et au compas les sommets de l'ellipse de foyers F et F' , d'excentricité $e = \frac{2}{3}$. Tracer cette ellipse.

Exercice 2.5 (B) Construire les hyperboles d'équations

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1.$$

Dans chaque cas, on fera figurer les sommets et les foyers, et on calculera l'excentricité e et le paramètre p .

Exercice 2.6 (B) On donne deux points distincts du plan, F et F' . Construire à la règle et au compas les sommets et les asymptotes de l'hyperbole de foyers F et F' , d'excentricité $e = 2$. Tracer cette hyperbole.

Exercice 2.7 (C) Soit (C) d'équation polaire

$$r = \frac{3}{1 - \frac{1}{2} \cos \theta}.$$

- 1) Quelle est la nature de (C) ? Donner son excentricité et son paramètre.
- 2) Calculer a , b , c .
- 3) Déterminer les sommets A et A' du grand axe de l'ellipse, qui correspondent à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.
- 4) Construire (C) .
- 5) Donner l'équation cartésienne de (C) .

Exercice 2.8 (C) Soit (P) d'équation polaire

$$r = \frac{p}{1 - \sin \theta} \quad (p > 0).$$

- 1) Quelle est la nature de (P) ? Donner son excentricité et son paramètre.
- 2) Déterminer l'équation cartésienne de (P) .
- 3) En prenant $p = \frac{1}{2}$, déduire de ce qui précède la position du foyer de la parabole $y = x^2$.

Exercice 2.9 (C) On considère la courbe (Γ) d'équation polaire

$$r = \frac{5}{1 - \frac{3}{2} \cos \theta}.$$

- 1) Quelle est la nature de (Γ) ? Donner son excentricité et son paramètre.
- 2) Calculer a , b , c .
- 3) Déterminer les sommets A et A' de l'hyperbole, qui correspondent à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.
- 4) Construire (Γ) .
- 5) Donner l'équation cartésienne de (Γ) .

Les techniques

Exercice 2.10 (Propriété bifocale de l'ellipse). Soit l'ellipse d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Soit $M(x, y)$ un point de l'ellipse. On sait que $x = a \cos t$ et $y = b \sin t$ (Formule 2.1).

- 1) Calculer en fonction de a , c et t la distance du foyer F au point M .
- 2) Calculer de même $F'M$, où F' est le deuxième foyer de l'ellipse.
- 3) En déduire que $FM + F'M = 2a$.

Exercice 2.11 (Paramètre de l'ellipse). Soit l'ellipse d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On note p son paramètre. En utilisant la propriété bifocale (Exercice 2.10), démontrer que

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Exercice 2.12 Démontrer la propriété bifocale de l'hyperbole (Formule (2.18)).

Exercice 2.13 Calculer la surface intérieure à l'ellipse d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Exercice 2.14 Démontrer le théorème 2.3.

Exercice 2.15 Soit la courbe (Γ) définie par l'équation polaire $r = \frac{\cos \theta}{\cos 2\theta}$.

1) Montrer que l'équation cartésienne de (Γ) est $x^2 - y^2 - x = 0$.

2) En déduire que (Γ) est une hyperbole dont on déterminera le centre, les foyers, l'excentricité et le paramètre.

Exercice 2.16 Soit k un paramètre vérifiant $0 < k \leq 1$.

On considère l'ellipse (E_k) d'équation cartésienne

$$x^2 + \frac{y^2}{k^2} = 1.$$

1) Dessiner sommairement (E_k) et en donner une équation paramétrique.

2) Soit $x_0 \in]0, 1[$. Déterminer un vecteur directeur de la tangente (T) à la courbe au point M_0 d'abscisse $x_0 = \cos t_0$ et d'ordonnée $y_0 > 0$. En déduire l'équation cartésienne de (T) .

3) Montrer que (T) coupe l'axe Ox en un point A_0 indépendant de k , dont on calculera l'abscisse.

4) En déduire une construction de la tangente à (E_k) en M_0 .

Exercice 2.17 Soit (E) l'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

et u un paramètre réel. On considère la droite (D_u) d'équation cartésienne $y = -x + u$.

1) Démontrer que les abscisses des points d'intersection de (D_u) et de (E) vérifient l'équation

$$5x^2 - 8ux + 4(u^2 - 1) = 0.$$

2) A quelle condition sur u la droite (D_u) coupe-t-elle l'ellipse (E) ?

3) Pour quelle valeurs de u la droite (D_u) est-elle tangente à (E) ?

4) Dans cette question, on suppose que (D_u) coupe l'ellipse (E) en deux points distincts A_u et B_u .

a) Calculer les coordonnées de A_u et B_u en fonction de u .

b) Calculer en fonction de u les coordonnées du milieu I_u du segment $A_u B_u$.

c) Démontrer que, lorsque u varie, le point I_u se déplace sur une droite (Δ) dont on déterminera l'équation cartésienne.

d) Le point I_u parcourt-il toute la droite (Δ) ?

Les exotiques et les olympiques

Exercice 2.18 On considère une ellipse \mathcal{E} de demi grand axe a et de demi petit axe b , avec $b < a$. On tourne cette ellipse d'un quart de tour autour de son centre, et on suppose que l'on peut inscrire deux carrés comme indiqué sur la figure ci-dessous. Calculer le rapport $\frac{b}{a}$.

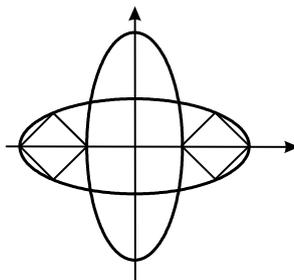


Figure 2.21

Exercice 2.19 Soit un triangle ABC avec $0 < \hat{A} < \frac{\pi}{2}$, $0 < \hat{B} < \frac{\pi}{2}$, $0 < \hat{C} < \frac{\pi}{2}$.

Déterminer le *point de Fermat* de ce triangle, c'est-à-dire le point F du plan tel que la somme de ses distances aux trois points A, B, C soit minimale.

Exercice 2.20 Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On considère les ellipses d'équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Calculer la surface intérieure commune à ces deux ellipses.

Exercice 2.21 Soit r la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- 1) Déterminer l'expression complexe de r , puis son expression analytique.
- 2) Soit $M(x, y)$ un point du plan, et soit $M'(x', y')$ l'image de M par r . Déterminer x et y en fonction de x' et y' , c'est-à-dire l'expression analytique de r^{-1} .
- 3) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan qui vérifient

$$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16.$$

Déterminer l'image (Γ') de (Γ) par r , puis construire (Γ') et (Γ) dans le même repère.

Chapitre 3

Courbes définies en coordonnées polaires

Les courbes définies en coordonnées polaires jouent un rôle important dans les applications, dès lors qu'un phénomène est relatif à un *point central*, ou *pôle*. C'est le cas notamment pour les mouvements à force centrale en physique. Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :

- A. Savoir utiliser le tableau des variations de r en fonction de θ pour tracer la courbe dans les autres cas.
- B. Savoir trouver la tangente en un point.
- C. Savoir étudier les branches infinies d'une courbe en polaires.
- D. Savoir calculer longueurs, surfaces et rayons de courbure en polaires.

3.1 Définitions et exemples

Dans le repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , l'angle polaire variable θ définit la base orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ (Figure 3.1).

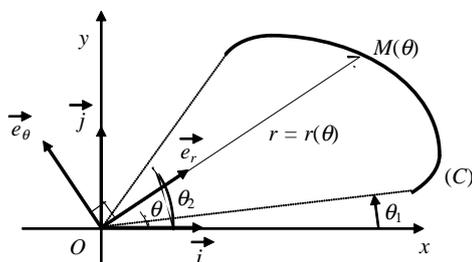


Figure 3.1

En vertu de la formule (1.22) de *Toutes les mathématiques*, on a

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}, \quad \vec{e}_\theta = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{i} + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{j} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}. \quad (3.1)$$

Une courbe en polaires est définie par la donnée d'une fonction $r = r(\theta)$. On construit alors, pour chaque valeur de θ , le point $M = M(\theta)$ défini par

$$\overrightarrow{OM} = r(\theta) \vec{e}_r. \quad (3.2)$$

Lorsque θ varie dans un intervalle $I = [\theta_1, \theta_2]$, le point $M(\theta)$ décrit une courbe (C) (Figure 3.1).

Dans certains cas, on obtiendra l'équation polaire $r = r(\theta)$ d'une courbe (C) à partir de son équation cartésienne $f(x, y) = 0$ en utilisant les formules de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (3.3)$$

Exemple 3.1 Soit (D) une droite du plan, d'équation cartésienne $ax + by = c$. Alors $ar \cos \theta + br \sin \theta = c$, d'où

$$r = \frac{c}{a \cos \theta + b \sin \theta}. \quad (3.4)$$

Ainsi une équation polaire du type (3.4) représente-t-elle une *droite du plan*. Par exemple,

$$r = \frac{1}{\cos \theta} \quad (3.5)$$

s'écrit $r \cos \theta = 1$, c'est-à-dire $x = 1$. Donc (3.5) est l'équation polaire de la droite verticale d'équation $x = 1$.

Exemple 3.2 Soit (C) un cercle du plan, d'équation cartésienne développée $x^2 + y^2 - ax - by + c = 0$. Supposons que (C) passe par l'origine O . Alors $(0, 0)$ vérifie cette équation, donc $c = 0$ et celle-ci s'écrit $x^2 + y^2 - ax - by = 0$. On trouve alors une équation polaire simple : $r^2 - ar \cos \theta - br \sin \theta = 0$. D'où après simplification par r :

$$r = a \cos \theta + b \sin \theta \quad (3.6)$$

Donc une équation polaire du type (3.6) représente un *cercle passant par O* . Par exemple $r = 4 \cos \theta + 2 \sin \theta$ est l'équation polaire du cercle de centre $\Omega(2, 1)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$ (vérifiez-le).

Exemple 3.3 Une équation polaire de la forme

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

est celle d'une *conique* (voir Chapitre 2).

Remarque 3.1 Une courbe définie en coordonnées polaires peut être considérée comme une courbe paramétrée¹, de paramètre θ . En particulier, la tangente au point $M = M(\theta)$ sera définie par le vecteur

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} [r(\theta) \vec{e}_r] = \frac{dr}{d\theta} \vec{e}_r + r(\theta) \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}.$$

En utilisant (3.1), on obtient

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \vec{e}_r + r(\theta) \vec{e}_\theta = r'(\theta) \vec{e}_r + r(\theta) \vec{e}_\theta. \quad (3.7)$$

Si ce vecteur est nul pour une valeur de θ , le point $M(\theta)$ est un *point singulier*. Il n'est pas utile alors de calculer la dérivée suivante (Exercice 3.7), car alors $r(\theta) = 0$ et la courbe passe par O (voir Théorème 3.1 ci-après).

Remarque 3.2 Dans l'étude des courbes en polaires, *il est important* de déterminer les valeurs de θ pour lesquelles le point M est en O , c'est-à-dire pour lesquels $r = 0$. Dans ce cas, si le point M est un point régulier, alors $r'(\theta) \neq 0$, et la formule (3.7) montre que la tangente est dirigée par \vec{e}_r . On peut donc énoncer le

Théorème 3.1 *Si pour une valeur θ_0 de l'angle polaire θ la courbe d'équation polaire $r = r(\theta)$ passe par le pôle O et que le point $M(\theta_0)$ est un point régulier, alors la tangente en $M(\theta_0)$ est la droite passant par O d'angle polaire θ_0 .*

3.2 Lemniscate de Bernoulli

Le plan général d'étude d'une courbe en polaires ressemble à celui d'une courbe en cartésiennes, sauf qu'on étudie directement r en fonction de θ . Considérons l'exemple de la lemniscate de Bernoulli, définie par l'équation polaire :

$$r = r(\theta) = \sqrt{\cos 2\theta}. \quad (3.8)$$

On remarque d'abord que, sous réserve que $r(\theta)$ soit défini, $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$. Cela signifie que les points $M(\theta)$ et $M(\theta + 2\pi)$ sont identiques (Figure 3.2), puisque dans ce cas le vecteur $\vec{e}_r(\theta)$ correspondant à θ et le vecteur $\vec{e}_r(\theta + 2\pi)$ correspondant à $\theta + 2\pi$ sont identiques.

De même, sous réserve que $r(\theta)$ existe, $r(\theta + \pi) = r(\theta)$. Cela signifie que les points $M(\theta)$ et $M(\theta + \pi)$ sont symétriques par rapport à O , puisqu'on reporte la même valeur de r suivant deux vecteurs $\vec{e}_r(\theta)$ et $\vec{e}_r(\theta + \pi)$ opposés (Figure 3.3).

¹Voir le chapitre 1.

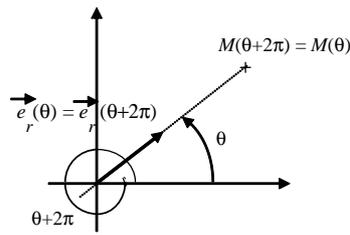


Figure 3.2

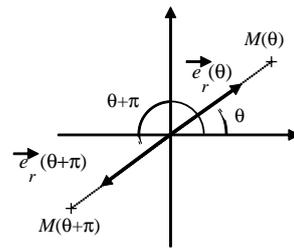


Figure 3.3

Enfin, toujours sous réserve que $r(\theta)$ existe, $r(-\theta) = r(\theta)$. Donc les points $M(\theta)$ et $M(-\theta)$ sont symétriques par rapport à Ox , puisqu'on reporte la même valeur de r suivant deux vecteurs $\vec{e}_r(\theta)$ et $\vec{e}_r(-\theta)$ symétriques par rapport à Ox (Figure 3.4).

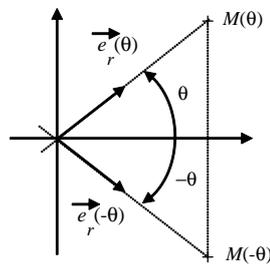


Figure 3.4

Compte-tenu de ces réductions, on voit qu'il suffit de faire varier θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$. La symétrie par rapport à Ox donnera la partie de la courbe pour θ variant entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0, et la symétrie par rapport à O donnera le reste, pour θ variant entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ (intervalle total de variation de $\theta : [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, de longueur 2π).

Or $\cos 2\theta$ doit être positif pour que r soit défini, on fait donc varier θ entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. On étudie alors les variations de r en fonction de θ . La fonction $r(\theta) = \sqrt{\cos 2\theta}$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}[$ et

$$r' = \frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \quad \left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right[\right).$$

D'où le tableau de variations de r en fonction de θ :

θ	0		$\frac{\pi}{4}$
r'	0	-	$-\infty$
r	1		0

La tangente au point A correspondant à $\theta = 0$ est donnée par (3.7) :

$$\left[\frac{dM}{d\theta} \right]_{\theta=0} = r'(0) \vec{e}_r(0) + r(0) \vec{e}_\theta(0) = \vec{e}_\theta(0).$$

Puisque $\vec{e}_\theta(0)$ est vertical, la tangente en A est verticale.

Lorsque $\theta = \frac{\pi}{4}$, la courbe passe par O . En vertu du théorème 3.1, la tangente en O est la droite d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire la première bissectrice.

On peut alors tracer la courbe (Figure 3.5). Partant du point A , avec sa tangente verticale, on tourne autour de O lorsque θ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$. Le point M se rapproche de O lors de ce mouvement car r décroît, pour

finale-ment arriver à O avec pour tangente la première bissectrice. On complète la courbe par symétrie par rapport à Ox , puis par rapport à O .

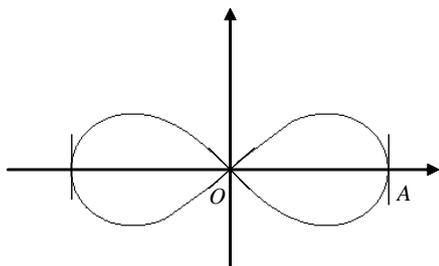


Figure 3.5 : Lemniscate de Bernoulli

Remarque 3.3 On observe que la lemniscate de Bernoulli est également symétrique par rapport à Oy . On peut le vérifier directement en comparant $r(\theta)$ et $r(\pi - \theta)$. On peut le déduire aussi du résultat suivant :

Théorème 3.2 *Considérons les trois éléments O , Ox , Oy . Si une courbe (C) est symétrique par rapport à deux de ces trois éléments, elle est symétrique par rapport au troisième.*

Démonstration Voir Exercice 3.9.

3.3 Branches infinies

Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} r(\theta) = \infty$, la courbe d'équation polaire admet une branche infinie lorsque $\theta \rightarrow \theta_0$. Celle-ci s'étudie sans difficulté en passant à la représentation paramétrique $x = x(\theta)$ et $y = y(\theta)$.

Exemple 3.4 Soit la courbe d'équation polaire $r = \tan \theta$. Lorsque $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $r \rightarrow \infty$. Il existe donc une branche infinie. Or on a

$$x = r \cos \theta = \sin \theta, \quad y = r \sin \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}.$$

Donc $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} x = 1$ et $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} y = \infty$. La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Exemple 3.5 Soit la courbe d'équation polaire

$$r = \frac{\cos \theta}{\cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)}.$$

Lorsque $\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}$, $r \rightarrow \infty$. On étudie la branche infinie en écrivant

$$x = r \cos \theta = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)}, \quad y = r \sin \theta = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)}.$$

Il en résulte que $\lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} x = \infty$ et $\lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} y = \infty$.

On recherche alors s'il existe une asymptote oblique $y = ax + b$ en calculant d'abord

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{y}{x} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \tan \theta = -1 = a.$$

Puis on calcule

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} (y - ax) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} (y + x) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)}{\cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)}.$$

En utilisant les formules d'addition, il vient

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} (y - ax) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)}{\cos \theta \cos \frac{\pi}{4} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{4}} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \sqrt{2} \cos \theta = -1.$$

Donc la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à la courbe.

Remarque 3.4 On notera que $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{y}{x} = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \tan \theta$, quelle que soit la courbe définie en polaires !

3.4 Longueurs, surfaces et rayon de courbure en polaires

Soit un arc \widehat{AB} donné en coordonnées polaires, et un point M qui se déplace par variations infinitésimales $d\vec{M}$ d'un point A à un point B (Figure 3.6), de telle sorte que θ soit croissant.

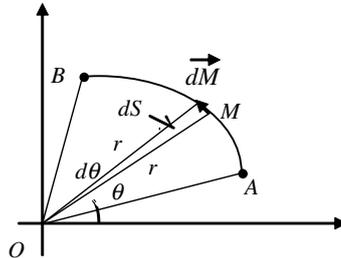


Figure 3.6

En vertu de (3.7), on a

$$d\vec{M} = (r'e_r + r\vec{e}_\theta) d\theta. \quad (3.9)$$

Or la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est orthonormée et $d\theta > 0$ puisque θ est croissant. Par conséquent

$$\|d\vec{M}\| = \sqrt{(r'd\theta)^2 + (rd\theta)^2} = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta. \quad (3.10)$$

En utilisant (1.21), on voit donc que la longueur de l'arc \widehat{AB} vaut

$$L = \int_A^B \|d\vec{M}\| = \int_{\theta=\theta_A}^{\theta=\theta_B} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta. \quad (3.11)$$

De même, lorsque θ varie d'une quantité infinitésimale $d\theta > 0$, le rayon vecteur \vec{OM} balaye une surface infinitésimale dS qui peut être assimilée à un secteur de cercle (car on considère que r n'a pas varié), de rayon r , d'angle au centre $d\theta$. En vertu du théorème 11.5 (Page 121) de *Toutes les Mathématiques*, on a donc

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta. \quad (3.12)$$

La surface balayée par le rayon vecteur lorsque M se déplace de A à B sera donc donnée par

$$S = \int_A^B dS = \frac{1}{2} \int_{\theta=\theta_A}^{\theta=\theta_B} r^2 d\theta. \quad (3.13)$$

Dans le cas où on décrit une courbe fermée (C) parcourue dans le sens trigonométrique, on voit que la surface intérieure à la courbe vaut

$$S = \frac{1}{2} \oint_{(C)} r^2 d\theta, \quad (3.14)$$

puisque le point M effectue un tour complet de la courbe en partant de n'importe quel point A .

Exemple 3.6 Considérons la lemniscate de Bernoulli (Section 3.2), d'équation polaire $r = \sqrt{\cos 2\theta}$. La surface intérieure à la partie droite de la lemniscate (entre O et A dans la figure 3.5) vaut

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{4} [\sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Remarque 3.5 En Cinématique, le point M de la figure 3.6 est mobile en fonction du temps t . La quantité $\mathcal{A} = \frac{dS}{dt}$ s'appelle la *vitesse aréolaire* et on a par (3.12)

$$\mathcal{A} = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (3.15)$$

Lorsque la vitesse aréolaire est constante, les aires balayées pendant des temps égaux sont égales. Cette situation se rencontre lorsqu'on étudie les mouvements à force centrale (Exercice 3.7).

Pour terminer, nous montrons comment calculer le rayon de courbure en un point d'une courbe donnée en coordonnées polaires. On utilise la formule (1.18), qui s'écrit

$$R = \frac{v^3}{\det(\vec{v}, \vec{a})}.$$

On considère ici que la courbe polaire est paramétrée par θ , de telle sorte que \vec{v} et \vec{a} ne représentent pas ici la vitesse et l'accélération au sens de la cinématique², mais

$$\vec{v} = \frac{d\vec{M}}{d\theta} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{d\theta} = \frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2}.$$

On calcule alors \vec{v} et \vec{a} dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. En vertu de (3.7), on a d'abord

$$\vec{v} = \frac{d\vec{M}}{d\theta} = r'\vec{e}_r + r\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad v = \|\vec{v}\| = \sqrt{r'^2 + r^2}.$$

En utilisant (1.13), il vient ensuite

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{d\theta} = (r''\vec{e}_r + r'\vec{e}_\theta) + \left(r'\vec{e}_\theta + r\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \right) = (r'' - r)\vec{e}_r + 2r'\vec{e}_\theta.$$

Il vient donc immédiatement

$$R = \frac{(\sqrt{r'^2 + r^2})^3}{\begin{vmatrix} r' & r'' - r \\ r & 2r' \end{vmatrix}} = \frac{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2r'^2 - rr'' + r^2}.$$

Exercices

Les basiques

Exercice 3.1 (A,B,C) Soit la courbe d'équation polaire $r = \tan \theta$.

- 1) Etudier l'effet des changements $\theta \leftarrow \theta + 2\pi$, $\theta \leftarrow \theta + \pi$ et $\theta \leftarrow -\theta$. Que choisit-on pour intervalle d'étude ?
- 2) Etudier les variations de r .
- 3) Etudier la branche infinie, puis tracer la courbe (C) .

Exercice 3.2 (A,B) On considère la courbe d'équation polaire $r = \sin \theta \cos 2\theta$.

- 1) Etudier l'effet des changements $\theta \leftarrow \theta + 2\pi$, $\theta \leftarrow \theta + \pi$, $\theta \leftarrow \pi - \theta$, $\theta \leftarrow -\theta$. Que choisit-on pour intervalle d'étude ?
- 2) Etudier les variations de r en fonction de θ et dresser le tableau des variations (on n'omettra pas d'y inclure les valeurs de θ où $M(\theta)$ passe par le pôle O).
- 3) Tracer la courbe.
- 4) Trouver son équation cartésienne.

Exercice 3.3 (A,B,D) Soit la courbe d'équation polaire $r = \cos 4\theta$.

- 1) Etudier l'effet des changements $\theta \leftarrow \theta + 2\pi$, $\theta \leftarrow \theta + \pi$, $\theta \leftarrow \frac{\pi}{2} - \theta$, $\theta \leftarrow -\theta$. Que choisit-on pour intervalle d'étude ?
- 2) Etudier les variations de r en fonction de θ et dresser le tableau des variations.
- 3) Tracer la courbe.
- 4) Démontrer que la courbe est invariante par rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- 5) Calculer la surface intérieure à la courbe.

Exercice 3.4 (A,B,C) On considère la courbe (Γ) d'équation polaire

$$r = 2 + \frac{1}{\cos \theta}.$$

- 1) Démontrer que (Γ) admet un axe de symétrie. En déduire l'intervalle d'étude.

²Pour l'expression de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires, voir les formules (10.26) et (10.27) de *Toutes les mathématiques*, pages 107-108.

- 2) Déterminer la valeur θ_0 de θ pour laquelle la courbe passe par l'origine O .
- 3) Etudier les variations de r en fonction de θ sur l'intervalle I . On fera figurer θ_0 dans le tableau de variations.
- 4) Etudier les branches infinies de la courbe (Γ) .
- 5) Représenter graphiquement (Γ) .

Exercice 3.5 (A,B,C) Soit la courbe (C) d'équation polaire

$$r = \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta + \sin \theta}.$$

- 1) Etudier l'effet des changements $\theta \leftarrow \theta + 2\pi$, $\theta \leftarrow \theta + \pi$, $\theta \leftarrow \frac{\pi}{2} - \theta$, $\theta \leftarrow -\theta$. Que choisit-on pour intervalle d'étude ?
- 2) Etudier les variations de r en fonction de θ , après avoir démontré que

$$r' = 2 \frac{\cos^3 \theta - \sin^3 \theta}{(\cos \theta + \sin \theta)^2}.$$

- 3) Etudier la branche infinie, puis tracer la courbe (C) .
- 4) Déterminer l'équation cartésienne de (C) .

Les techniques

- Exercice 3.6** 1) Trouver l'équation polaire de la cardioïde lorsque le pôle est le point A de la figure 1.8.
 2) Calculer la surface intérieure à la cardioïde en utilisant son équation polaire. Retrouver ainsi le résultat de l'exemple 1.4.
 3) Calculer la longueur totale de la cardioïde en utilisant son équation polaire. Retrouver ainsi le résultat de l'exercice 1.8.

Exercice 3.7 Soit $M(t)$ un point mobile dans (O, \vec{i}, \vec{j}) orthonormé direct. On rappelle (*Toutes les mathématiques*, Formule (10.27) page 108) que son accélération vaut

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{M}}{dt^2} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \vec{e}_\theta$$

Démontrer que \vec{a} et \vec{OM} sont colinéaires si, et seulement si, la vitesse aréolaire du mobile est constante.

Exercice 3.8 Comparer les longueurs de la courbe d'équation polaire $r = \cos 4\theta$ (Exercice 3.3) et de l'ellipse de grand axe $a = 4$ et de petit axe $b = 1$.

Exercice 3.9 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on note s_O la symétrie par rapport à O , s_{Ox} la symétrie par rapport à Ox , s_{Oy} la symétrie par rapport à Oy .

- 1) Déterminer les composées deux à deux de ces trois symétries. On regroupera les résultats dans un tableau à double entrée.
- 2) Démontrer le théorème 3.2.

Les exotiques et les olympiques

Exercice 3.10 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , l'unité est 1 cm. Soit a un réel positif et A le point de coordonnées $x = a$, $y = 0$. Dans tout ce problème, θ désigne un réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On note D la droite passant par O et d'angle polaire θ et on note D' la droite passant par A et d'angle polaire 3θ .

- 1) Quelles sont les valeurs de θ pour lesquelles les droites D et D' sont concourantes ?
- 2) Ecrire une équation de D et une équation de D' . En déduire les coordonnées de M , intersection de D et D' , lorsque ce point existe.
- 3) Etablir la formule

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta} = 2 \cos \theta - \frac{1}{2 \cos \theta}.$$

En déduire que l'ensemble des points M , lorsque θ décrit $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, est contenu dans la courbe Γ d'équation polaire :

$$r = a \left(2 \cos \theta - \frac{1}{2 \cos \theta} \right).$$

- 4) Construire la courbe Γ en précisant les branches infinies.
- 5) Le tracé de Γ fait apparaître une boucle. Calculer la surface intérieure de cette boucle.

Exercice 3.11 Soit $e \in]0, 1[$. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\pi \frac{dx}{(1 - e \cos x)^2}.$$

Exercice 3.12 Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Par définition, l'inversion ρ de pôle O transforme le point $M \neq O$ en le point $M' = \rho(M)$ tel que

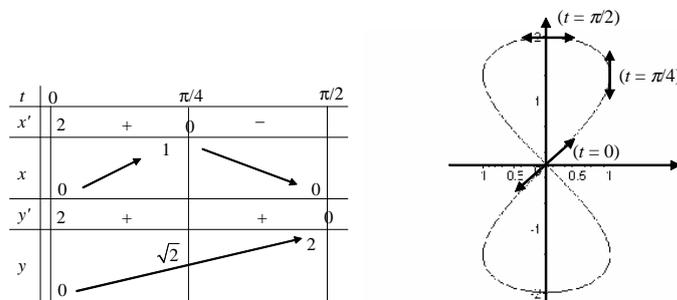
$$O, M \text{ et } M' \text{ sont alignés et } OM \times OM' = 1.$$

- 1) Prouver que ρ est bijective de $(P^*) = (P) \setminus \{O\}$ dans (P^*) et que $\rho^{-1} = \rho$. On dit que ρ est *involutive* de (P^*) dans (P^*) .
- 2) Trouver l'image par l'inversion ρ d'une droite ne passant pas par O .
- 3) Trouver l'image par l'inversion ρ de l'hyperbole d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$.

Solutions des exercices

Solutions des exercices du chapitre 1

Exercice 1.1 1) x et y sont périodiques de période 2π . De plus $x(t + \pi) = x(t)$ et $y(t + \pi) = -y(t)$. Donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x (faire un dessin). On a aussi $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Donc la courbe est symétrique par rapport à O (faire un dessin). L'intervalle d'étude est $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 2) On a $x'(t) = 2 \cos 2t$ et $y'(t) = 2 \cos t$, d'où le tableau de variations.

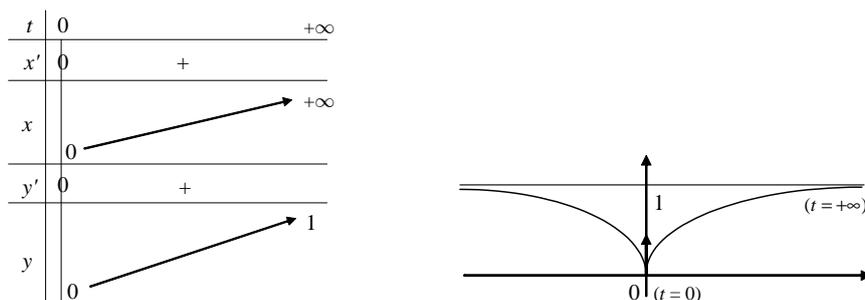


3) La tangente pour $t = 0$ est la première bissectrice (vecteur directeur $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$). D'où la courbe (ci-dessus).
 4) On a $x = 2 \sin t \cos t = y \cos t$. Donc $x^2 = y^2 \cos^2 t = y^2 (1 - \sin^2 t)$.
 Puisque $\sin t = \frac{y}{2}$, l'équation cartésienne est $x^2 = y^2 \left(1 - \frac{y^2}{4}\right)$.
 5) On utilise (1.24), en se rappelant qu'il faut parcourir la boucle dans le sens trigonométrique (Remarque 1.3). On ne garde donc que la partie comprise entre 0 et π , et on multiplie le résultat obtenu par 2. Il vient

$$S = -2 \int_0^\pi y dx = -8 \int_0^\pi \sin t \cos 2t dt = -4 \int_0^\pi (\sin 3t - \sin t) dt = \frac{16}{3}.$$

Attention : si on prend l'intégrale entre 0 et 2π , on trouve 0 car la surface entre 0 et π est comptée positivement (courbe parcourue dans le sens trigonométrique), tandis que celle entre π et 2π est comptée négativement (courbe parcourue dans le sens contraire du sens trigonométrique).

Exercice 1.2 1) x et y sont définies sur \mathbb{R} . On a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$. Un petit graphique montre alors que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y . On étudie les variations pour $t \geq 0$.
 2) On a $x'(t) = \frac{t^2(t^2+3)}{(1+t^2)^2}$ et $y'(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$. D'où les variations :



3) Le point de paramètre $t = 0$ est un point singulier, puisque x' et y' s'annulent simultanément. On calcule

$$x'' = \left[(t^4 + 3t^2) (1 + t^2)^{-2} \right]' = (4t^3 + 6t) (1 + t^2)^{-2} + (t^4 + 3t^2) (-4t) (1 + t^2)^{-3},$$

$$y'' = 2 \left[t (1 + t^2)^{-2} \right]' = 2 \left[(1 + t^2)^{-2} - 4t^2 (1 + t^2)^{-3} \right].$$

On a donc $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 2$. La tangente est verticale.

4) Le tableau de variations montre qu'on a une asymptote horizontale d'équation $y = 1$. Voir graphique ci-dessus.

5) On cherche à éliminer t . On voit que $t = \frac{x}{y}$. En reportant dans y par exemple, il vient

$$y \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) = \frac{y^2}{x^2}.$$

D'où le résultat en multipliant par x^2 .

Exercice 1.3 1) On transforme d'abord les expressions de x et y :

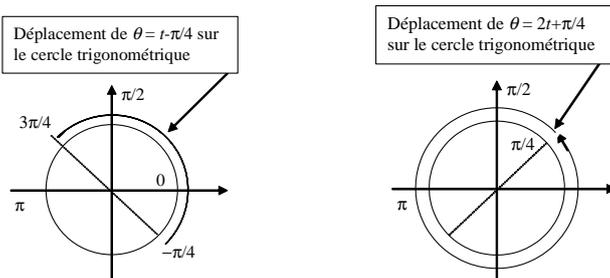
$$x = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right) = 2\sqrt{2} \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$y = 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2t \right) = 3\sqrt{2} \left(\cos 2t \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2t \sin \frac{\pi}{4} \right) = 3\sqrt{2} \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right).$$

2) Il est clair que x et y sont périodiques de période 2π . De plus $x(t + \pi) = -x(t)$ et $y(t + \pi) = y(t)$. Donc la courbe est symétrique par rapport à Oy (faire un dessin).

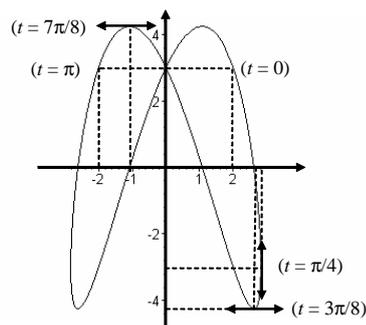
3) L'étude se fait donc sur $[0, \pi]$. On a $x'(t) = -2\sqrt{2} \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right)$ et $y'(t) = -6\sqrt{2} \sin \left(2t + \frac{\pi}{4} \right)$.

Les signes de x' et y' s'obtiendront en étudiant les déplacements de $t - \frac{\pi}{4}$ et $2t + \frac{\pi}{4}$ lorsque t varie de 0 à π sur le cercle trigonométrique :



D'où le tableau de variations :

t	0	$\pi/4$	$3\pi/8$	$7\pi/8$	π			
x'	2	+	0	-	-	-	-2	
x	2	↗ 2,8		↘ 2,6		↘ -1,1	↘ -2	
y'	-6	-	-	0	+	0	-	-6
y	3	↘ -3		↗ -4,2		↗ 4,2	↘ 3	



4) Points d'intersection avec Oy : on résout $x = 0$ et on obtient $t = \frac{3\pi}{4}$, c'est-à-dire $y = 3$.

5) On en déduit la courbe (ci-dessus à droite).

6) Pour obtenir l'équation cartésienne, c'est-à-dire une relation directe entre x et y , il s'agit d'éliminer le paramètre t . Le plus simple est sans doute d'élever x au carré :

$$x^2 = 4 (\cos t + \sin t)^2 = 4 (\sin^2 t + \cos^2 t + 2 \sin t \cos t) = 4(1 + \sin 2t).$$

On en déduit $\sin 2t = \frac{x^2}{4} - 1$ (*). En reportant dans l'expression de y , il vient

$$y = 3 \left(\cos 2t - \left(\frac{x^2}{4} - 1 \right) \right) \Leftrightarrow \cos 2t = \frac{y}{3} + \frac{x^2}{4} - 1 (**)$$

En élevant (*) et (**) au carré et en additionnant, $\sin 2t$ et $\cos 2t$ s'éliminent et on obtient

$$\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{3} + \frac{x^2}{4} - 1\right)^2 = 1.$$

Exercice 1.4 Le cercle de centre O de rayon R a pour représentation paramétrique $x = R \cos t$, $y = R \sin t$. Donc

$$x' = -R \sin t, \quad y' = R \cos t, \quad x'' = -R \cos t \quad y'' = -R \sin t.$$

Son rayon de courbure au point de paramètre t vaut donc

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'} = \frac{[R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)]^{\frac{3}{2}}}{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \frac{R^3}{R^2} = R.$$

Exercice 1.5 Dans le cas d'une courbe $y = f(x)$, le paramètre est x , donc $x' = 1$ et $x'' = 0$. La formule du rayon de courbure s'écrit alors

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Dans le cas de la parabole $y = x^2$, on a $y' = 2x$ et $y'' = 2$. Donc le rayon de courbure au point d'abscisse x vaut

$$R = \frac{(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}}{2}.$$

En particulier, pour $x = 0$ on a $R = \frac{1}{2}$.

Exercice 1.6 On applique la même formule avec $y = \operatorname{ch} x$. Alors $y' = \operatorname{sh} x$ et $y'' = \operatorname{ch} x$. Donc le rayon de courbure au point d'abscisse x vaut

$$R = \frac{(1 + \operatorname{sh}^2 x)^{\frac{3}{2}}}{\operatorname{ch} x} = \frac{(\operatorname{ch}^2 x)^{\frac{3}{2}}}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{ch}^2 x.$$

Pour $x = 0$ on a $R = 1$.

Exercice 1.7 1) On a

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{M}}{dt} = 2 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos t \end{pmatrix}, & \|\vec{v}\|^2 &= 4(\cos^2 2t + \cos^2 t), \\ \vec{T} &= \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\cos 2t}{\sqrt{\cos^2 2t + \cos^2 t}} \vec{i} + \frac{\cos t}{\sqrt{\cos^2 2t + \cos^2 t}} \vec{j}. \end{aligned}$$

Puisqu'un vecteur directement orthogonal à $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, il vient

$$\vec{N} = -\frac{\cos t}{\sqrt{\cos^2 2t + \cos^2 t}} \vec{i} + \frac{\cos 2t}{\sqrt{\cos^2 2t + \cos^2 t}} \vec{j}.$$

2) Puisque $v = \|\vec{v}\| = 2\sqrt{\cos^2 2t + \cos^2 t}$, on a

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-4 \sin 2t \cos 2t - 2 \sin t \cos t}{\sqrt{\cos^2 2t + \cos^2 t}} = \frac{-\sin 2t(1 + 4 \cos 2t)}{\sqrt{\cos^2 2t + \cos^2 t}}.$$

Par ailleurs le rayon de courbure vaut

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'} = \frac{[4(\cos^2 2t + \cos^2 t)]^{\frac{3}{2}}}{4(2 \sin 2t \cos t - \cos 2t \sin t)} = \frac{2[\cos^2 2t + \cos^2 t]^{\frac{3}{2}}}{2 \sin 2t \cos t - \cos 2t \sin t}.$$

L'accélération dans le repère de Frénet vaut donc

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N} = \frac{-\sin 2t(1 + 4 \cos 2t)}{\sqrt{\cos^2 2t + \cos^2 t}} \vec{T} + \frac{4 \sin 2t \cos t - 2 \cos 2t \sin t}{2\sqrt{\cos^2 2t + \cos^2 t}} \vec{N}.$$

Exercice 1.8 1) Cette longueur vaut

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 2R \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin 2t - \sin t)^2 + (\cos t - \cos 2t)^2} dt.$$

En développant et en utilisant les formules d'addition, il vient

$$(\sin 2t - \sin t)^2 + (\cos t - \cos 2t)^2 = 2 - 2[\cos 2t \cos t + \sin 2t \sin t] = 2 - 2 \cos(2t - t) = 2(1 - \cos t) = 4 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

En remplaçant dans l'intégrale, on obtient finalement

$$L = 4R \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = 4R \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 16R.$$

2) Cette surface vaut $S = - \int_{(C)} y dx = 2R^2 \int_{t=0}^{t=2\pi} (2 \sin t - \sin 2t) (\sin t - \sin 2t) dt$. En développant, il vient

$$\begin{aligned} S &= 2R^2 \int_0^{2\pi} (2 \sin^2 t - 3 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t) dt = 2R^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos t - 6 \sin^2 t \cos t + \frac{1}{2} (1 - \cos 4t) \right) dt \\ &= 2R^2 \left[t - \sin t - 2 \sin^3 t + \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \right]_0^{2\pi} = 6\pi R^2. \end{aligned}$$

Exercice 1.9 Dans le cas d'une courbe $y = f(x)$, le paramètre est x car $x = x$ et $y = f(x)$. Dans ce cas $x' = 1$ et la formule qui donne la longueur d'un arc de courbe est $L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$. Pour la chaînette, $y'(x) = \operatorname{sh} x$, donc

$$L = \int_{-b}^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = 2 \int_0^b \operatorname{ch} x dx = 2 [\operatorname{sh} x]_0^b = 2 \operatorname{sh} b.$$

Exercice 1.10 Soit $F(x) = x\sqrt{1 + \alpha^2 x^2} + \frac{1}{\alpha} \ln(\alpha x + \sqrt{1 + \alpha^2 x^2})$. On calcule

$$F'(x) = \sqrt{1 + \alpha^2 x^2} + \frac{\alpha^2 x^2}{\sqrt{1 + \alpha^2 x^2}} + \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha + \frac{\alpha^2 x}{\sqrt{1 + \alpha^2 x^2}}}{\alpha x + \sqrt{1 + \alpha^2 x^2}} = \sqrt{1 + \alpha^2 x^2} + \frac{\alpha^2 x^2}{\sqrt{1 + \alpha^2 x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 x^2}} = 2\sqrt{1 + \alpha^2 x^2},$$

d'où le résultat. Ensuite, comme dans l'exercice 1.9, on écrit

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4a^2 x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 4a^2} + \frac{1}{2a} \ln(2a + \sqrt{1 + 4a^2}) \right).$$

Exercice 1.11 Trouver un point double K revient à trouver deux valeurs $t \neq t'$ telles que

$$\frac{3}{t^2 - 2t} = \frac{3}{t'^2 - 2t'} \quad \text{et} \quad \frac{t^2 - 3}{t} = \frac{t'^2 - 3}{t'} \quad (**)$$

En effet, le point M doit passer en K à deux instants différents. Pour résoudre ce système, le principe est le suivant : il admet de toute façon la solution $t = t'$; on cherche donc à mettre en facteur $t' - t$, de façon à simplifier par $t' - t$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} t'^2 - 2t' = t^2 - 2t \\ t't^2 - 3t' = tt'^2 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'^2 - t^2 - 2(t' - t) = 0 \\ t't^2 - tt'^2 - 3(t' - t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t' - t)(t' + t - 2) = 0 \\ (t' - t)(-tt' - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' + t - 2 = 0 \\ -tt' - 3 = 0 \end{cases}$$

On a donc $t' = -t + 2$. En reportant dans la deuxième équation, il vient $t^2 - 2t - 3 = 0$, qui a pour solutions $t_1 = -1$ et $t_2 = 3$. Les valeurs de t' associées sont $t'_1 = -t_1 + 2 = 3$ et $t'_2 = -t_2 + 2 = -1$. Le point double est $K(1, 2)$, atteint pour $t = -1$ et $t = 3$.

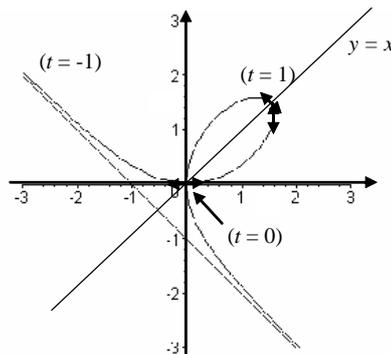
Exercice 1.12 1) On observe que x et y ne sont pas définis lorsque $t = -1$. On a immédiatement $x(\frac{1}{t}) = y(t)$ et $y(\frac{1}{t}) = x(t)$. Il en résulte que la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice $y = x$.

2) Pour tout $t \neq -1$, on a

$$x'(t) = \frac{3(1 - 2t^3)}{(1 + t^3)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{3t(2 - t^3)}{(1 + t^3)^2}.$$

Donc x' s'annule pour $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \simeq 0,8$. De plus, sur $] -1, 1[$, y' s'annule seulement pour $t = 0$. D'où le tableau de variations :

t	-1	0	0,8	1	
x'		+	+	0	-
x	$-\infty$		0	1,6	1,5
y'		-	0	+	+
y	$+\infty$		0	1,3	1,5



3) On a d'abord $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1} t = -1$. Puis, en utilisant $t^3 + 1 = (t + 1)(t^2 - t + 1)$, on voit que

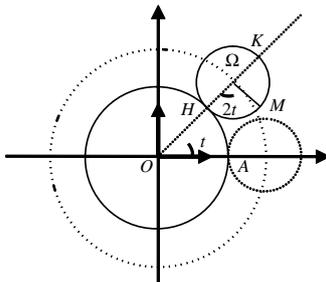
$$\lim_{t \rightarrow -1} (y + x) = \lim_{t \rightarrow -1} \left(\frac{3t(t+1)}{t^3+1} \right) = \lim_{t \rightarrow -1} \left(\frac{3t}{1-t+t^2} \right) = -1.$$

Donc la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à la courbe lorsque $t \rightarrow -1$.

4) Voir ci-dessus à droite.

5) On élimine t . On a $t = \frac{y}{x}$. En reportant dans l'expression de x , on obtient $x^3 + y^3 = 3xy$.

Exercice 1.13 1) Le principe est le même que pour la cardioïde. La condition de roulement sans glissement se traduit par l'égalité des longueurs des arcs de cercle HA et HM dans la figure ci-dessous.



Comme les rayons du cercle roulant est le double de celui du cercle de base, cela signifie que $(\widehat{\Omega H, \Omega M}) = 2t$. L'angle polaire du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ dans la base orthonormée directe (\vec{i}, \vec{j}) vaut

$$(\vec{i}, \widehat{\Omega M}) = (\vec{i}, \widehat{\Omega K}) + (\widehat{\Omega K, \Omega H}) + (\widehat{\Omega H, \Omega M}) = 3t + \pi.$$

On a donc $\overrightarrow{\Omega M} = \frac{R}{2} [\cos(3t + \pi) \vec{i} + \sin(3t + \pi) \vec{j}] = -\frac{R}{2} (\cos 3t \vec{i} + \sin 3t \vec{j})$.

En utilisant la relation de Chasles $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$, il vient

$$\overrightarrow{OM} = \frac{3R}{2} (\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}) - \frac{R}{2} (\cos 3t \vec{i} + \sin 3t \vec{j}) = \frac{R}{2} [(3 \cos t - \cos 3t) \vec{i} + (3 \sin t - \sin 3t) \vec{j}].$$

D'où une équation paramétrique de l'épicycloïde à deux points de rebroussement :

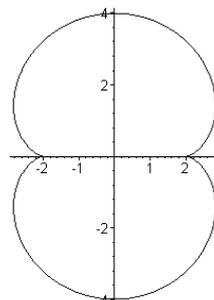
$$x = \frac{R}{2} (3 \cos t - \cos 3t) \quad \text{et} \quad y = \frac{R}{2} (3 \sin t - \sin 3t).$$

2) Etudions les variations simultanées de x et y . D'abord, x et y sont périodiques de période 2π . De plus $x(t + \pi) = -x(t)$, et $y(t + \pi) = -y(t)$. Donc la courbe est symétrique par rapport à O . On a aussi $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Donc la courbe est également symétrique par rapport à Ox . On limite donc l'intervalle d'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$. En utilisant les formules de transformation de sommes en produits, on a :

$$x' = \frac{3R}{2} (-\sin t + \sin 3t) = 3R \sin t \cos 2t \quad \text{et} \quad y' = \frac{3R}{2} (\cos t - \cos 3t) = 3R \sin 2t \sin t.$$

D'où le tableau des variations simultanées.

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$
x'	0	+	0
x	R	$\sqrt{2}R$	0
y'	0	+	0
y	0	$R/\sqrt{2}$	$2R$



La tangente au point singulier, de paramètre $t = 0$, s'obtient en calculant $x''(0) = 3R$ et $y''(0) = 0$. On obtient une tangente horizontale. D'où la courbe représentative (ci-dessus à droite pour $R = 2$) de l'hypocycloïde à deux points de rebroussement, qui s'appelle aussi la *néphroïde*.

3) Pour la longueur, on calcule d'abord

$$x'^2 + y'^2 = \frac{9R^2}{4} ((-\sin t + \sin 3t)^2 + (\cos t - \cos 3t)^2) = \frac{9R^2}{2} (1 - \cos 2t) = 9R^2 \sin^2 t.$$

On a donc

$$L = 2 \int_{t=0}^{t=\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 6R \int_{t=0}^{t=\pi} |\sin t| dt = 6R \int_{t=0}^{t=\pi} \sin t dt = 6R [-\cos t]_0^\pi = 12R.$$

Pour la surface, on a

$$\begin{aligned} S &= -2 \int_{t=0}^{t=\pi} y dx = \frac{3R^2}{2} \int_{t=0}^{t=\pi} (3 \sin^2 t + \sin^2 3t - 4 \sin t \sin 3t) dt \\ &= \frac{3R^2}{2} \int_{t=0}^{t=\pi} \left(\frac{3}{2} (1 - \cos 2t) + \frac{1}{2} (1 - \cos 6t) - 2 (\cos 2t - \cos 4t) \right) dt = 3\pi R^2. \end{aligned}$$

Exercice 1.14 Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ deux bases orthonormées directes du plan. Si nous notons θ l'angle polaire de \vec{u} dans \mathcal{B} , alors $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$. Soient maintenant \vec{U} et \vec{V} deux vecteurs du plan, donnés par leurs composantes dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' :

$$\vec{U} = x \vec{i} + y \vec{j} = x' \vec{u} + y' \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{V} = a \vec{i} + b \vec{j} = a' \vec{u} + b' \vec{v}.$$

En remplaçant \vec{u} et \vec{v} dans les expressions ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned} \vec{U} &= x \vec{i} + y \vec{j} = x' (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + y' (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}), \\ \vec{V} &= a \vec{i} + b \vec{j} = a' (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + b' (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}). \end{aligned}$$

Par identification, on obtient les formules de changement de base :

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta, & y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta, \\ a &= a' \cos \theta - b' \sin \theta, & b &= a' \sin \theta + b' \cos \theta. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' \cos \theta - y' \sin \theta & a' \cos \theta - b' \sin \theta \\ x' \sin \theta + y' \cos \theta & a' \sin \theta + b' \cos \theta \end{vmatrix} = x' b' - y' a' = \begin{vmatrix} x' & a' \\ y' & b' \end{vmatrix}.$$

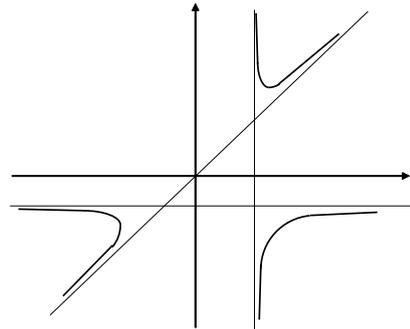
Donc le déterminant de deux vecteurs ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie pour le calculer.

Exercice 1.15 1) x est défini sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et y est défini sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

2) On calcule $x' = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2} = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2}$ et $y' = 1 - \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$.

On en déduit le tableau des variations simultanées :

t	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
x'	+	0	-	-	0	+
x	$-\infty$	\nearrow	-2	\searrow	$+\infty$	\nearrow
y'	+	+	0	-	-	0
y	$-\infty$	\nearrow	$-1,5$	\searrow	$+\infty$	\nearrow
	$-\infty$		$-\infty$		3	$+\infty$



3) Le tableau de variations montre qu'on a une asymptote horizontale $y = -1$ (quand $t \rightarrow 0$) et une asymptote verticale $x = 2$ (quand $t \rightarrow 1$). Quand $t \rightarrow \infty$, on calcule :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t-1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} \right) = 0.$$

Donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe lorsque $t \rightarrow \pm\infty$.

4) On trace la courbe en commençant par placer les points à tangente horizontale et verticale et les asymptotes, et en s'aidant du tableau de variations (ci-dessus à droite).

Solutions des exercices du chapitre 2

Exercice 2.1 Pour la première ellipse, $a = 2$ et $b = 1$. Le grand axe est donc Ox , le centre O , le petit axe Oy . Les foyers sont les points d'intersection du cercle de centre B de rayon 2 avec le grand axe (voir Figure 2.22) et on a $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$. Donc

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad p = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}.$$

Pour la deuxième, $a = 3$ (la plus grande des deux valeurs) et $b = 2$. Puisque a est situé sous y , le grand axe est Oy , le centre est O , le petit axe est Ox . Les foyers sont les points d'intersection du cercle de centre B de rayon 3 (Figure 2.23) avec le grand axe et on a $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$. Donc

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{et} \quad p = \frac{b^2}{a} = \frac{4}{3}.$$

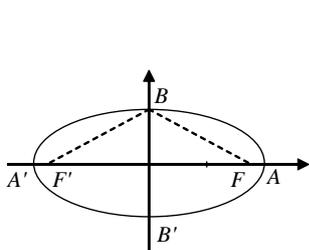


Figure 2.22

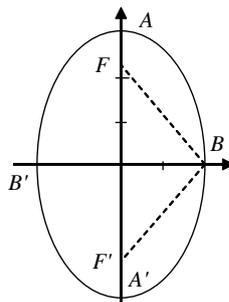


Figure 2.23

Exercice 2.2 1) Cherchons l'équation réduite en écrivant

$$x^2 + 4x + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{(x + 2)^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1.$$

Il s'agit donc de l'ellipse de centre $\Omega(-2, 0)$, de grand axe Ox , avec $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$ et $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Figure 2.24).

2) L'équation s'écrit de même

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{(y - 1)^2}{3^2} = 1.$$

Il s'agit de l'ellipse de centre $\Omega(0, 1)$, d'axe focal vertical, avec $a = 3$, $b = 1$, $c = 2\sqrt{2}$ et $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (Figure 2.25).

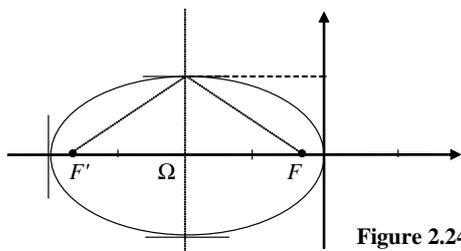


Figure 2.24

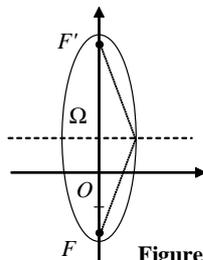


Figure 2.25

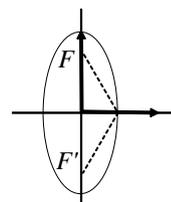


Figure 2.26

Exercice 2.3 1) Posons $z = x + iy$. On voit que

$$10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4 \Leftrightarrow 10(x + iy)(x - iy) + 3[(x + iy)^2 + (x - iy)^2] = 4 \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 = 1.$$

Donc (Γ) est une ellipse d'axe focal vertical avec $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $p = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{4}$. Voir la représentation graphique Figure 2.26.

Exercice 2.4 Le soin de construire la figure suivant les indications est laissé au lecteur. On construit d'abord la médiatrice (Δ) de FF' , qui coupe FF' en O . La distance OF est c . Puisque $e = \frac{c}{a}$, on a $a = \frac{3}{2}c = \frac{3}{2}OF$. On construit donc le milieu I de OF , puis le cercle de centre F de rayon OI . Ce cercle coupe FF' en deux points. Celui qui n'est pas entre O et F est le sommet A . Par symétrie par rapport à O on obtient A' . Le cercle de centre F de rayon OA coupe (Δ) aux sommets B et B' du petit axe. En plaçant les tangentes aux sommets, on trace l'ellipse.

Exercice 2.5 Pour la première hyperbole, $a = 2$ et $b = 1$. L'axe focal est donc Ox , le centre O , l'axe non focal Oy . On a les asymptotes grâce au point B vérifiant $AB = b = 1$ (Figure 2.27). Les foyers sont les intersections du cercle de centre O de rayon $OB = c$ avec l'axe focal et $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$. Donc

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad p = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}.$$

Pour la deuxième hyperbole, l'équation s'écrit

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$

après multiplication par -1 . Donc $a = 2$ (c'est la valeur qui figure sous le terme positif) et $b = 3$. Puisque a est situé sous y , l'axe focal est Oy , le centre O , l'axe non focal Ox . On obtient les asymptotes grâce au point B vérifiant $AB = b = 2$ (Figure 2.28). Les foyers sont les points d'intersection du cercle de centre O de rayon $OB = c$ avec l'axe focal et on a $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$. Donc

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{2}.$$

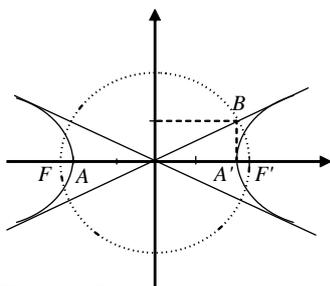


Figure 2.27

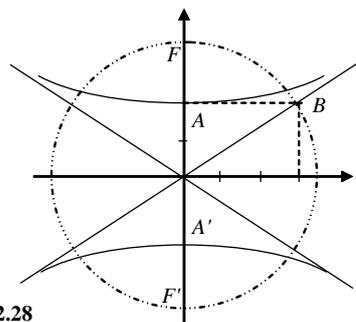


Figure 2.28

Exercice 2.6 Comme dans l'exercice 2.4, le soin de construire la figure suivant les indications est laissé au lecteur. On construit d'abord la médiatrice (Δ) de FF' , qui coupe FF' en O . La distance OF est c . Puisque $e = \frac{c}{a}$, on a $a = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}OF$. Le milieu de OF est le sommet A . Par symétrie par rapport à O on obtient A' . On construit ensuite la perpendiculaire (D) à (FF') passant par A . Le cercle de centre O de rayon OF coupe (D) aux sommets K et K' . On trace les droites (OK) et (OK'), qui sont les asymptotes. D'où l'hyperbole.

Exercice 2.7 1) Il s'agit d'une conique, d'excentricité $e = \frac{1}{2} < 1$. Donc (C) est une ellipse d'axe focal Ox , de foyer O , de paramètre $p = 3$.

2) On sait que

$$p = \frac{b^2}{a} \quad \text{et} \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Donc ici $b^2 = 3a$ et $\frac{a^2}{4} = a^2 - b^2$, c'est-à-dire $b^2 = \frac{3}{4}a^2$. On en déduit que $\frac{3}{4}a^2 = 3a$, d'où après simplification par $3a$, $a = 4$ et $b = 2\sqrt{3}$. Enfin $c = ea = 2$.

3) Pour $\theta = 0$, on a $r = 6$. Donc le sommet A a pour coordonnées cartésiennes $x = 6, y = 0$.

Pour $\theta = \pi$, on a $r = 2$. Donc le sommet A a pour coordonnées cartésiennes $x' = -2, y' = 0$.

4) On place d'abord les sommets A et A' , puis le centre Ω à partir du foyer O car $c = 2$, et enfin les sommets B et B' . Le deuxième foyer est F . Voir figure 2.29.

5) Cette équation s'écrit $\frac{(x - x_\Omega)^2}{a^2} + \frac{(y - y_\Omega)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

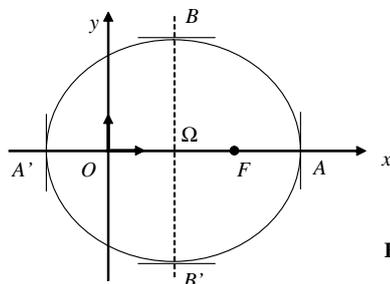


Figure 2.29

Exercice 2.8 1) L'équation s'écrit

$$r = \frac{p}{1 - \sin \theta} = \frac{p}{1 - \cos(\theta - \frac{\pi}{2})}.$$

Il s'agit donc exactement de l'équation polaire d'une parabole de paramètre p (et d'excentricité $e = 1$), sauf que θ est remplacé par $\theta - \frac{\pi}{2}$. Cela signifie que l'origine des angles est l'axe des y , et que l'axe de la parabole est donc vertical. Son foyer est O , comme toujours avec les équations de coniques en polaires.

2) Ceci peut se confirmer en calculant l'équation cartésienne :

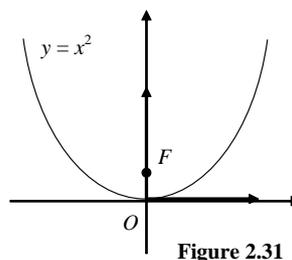
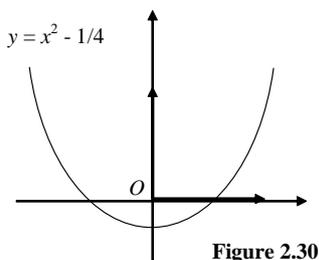
$$r = \frac{p}{1 - \sin \theta} \Leftrightarrow r - r \sin \theta = p \Leftrightarrow r = p + y \Leftrightarrow r^2 = (p + y)^2,$$

car on sait que $y = r \sin \theta$. Mais on a aussi $r^2 = x^2 + y^2$, donc l'équation cartésienne est

$$x^2 + y^2 = p^2 + 2py + y^2 \Leftrightarrow x^2 = p^2 + 2py \Leftrightarrow y = \frac{1}{2p}(x^2 - p^2).$$

C'est bien une fonction du second degré, dont la représentation graphique est une parabole d'axe Oy (Section 7.4 de *Toutes les mathématiques*).

3) Pour $p = \frac{1}{2}$, l'équation s'écrit $y = x^2 - \frac{1}{4}$. Pour cette parabole, le foyer est O et le sommet a pour ordonnée $-\frac{1}{4}$ (Figure 2.30). En la décalant de $\frac{1}{4}$ vers le haut, on voit que le foyer de la parabole $y = x^2$ est le point F d'abscisse 0 et d'ordonnée $\frac{1}{4}$ (Figure 2.31).



Exercice 2.9 1) Il s'agit d'une conique, d'excentricité $e = \frac{3}{2} > 1$. Donc (Γ) est une hyperbole d'axe focal Ox , de foyer O , de paramètre $p = 5$.

2) On sait que $p = \frac{b^2}{a}$ et $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$. Donc ici $b^2 = 5a$ et $\frac{9a^2}{4} = a^2 + b^2$, c'est-à-dire $b^2 = \frac{5}{4}a^2$.

On en déduit que $\frac{5}{4}a^2 = 5a$, d'où après simplification par $5a$, $a = 4$ et $b = 2\sqrt{5}$. Enfin $c = ea = 6$.

3) Pour $\theta = 0$, on a $r = -10$. Donc le sommet A a pour coordonnées cartésiennes $x = -10, y = 0$.

Pour $\theta = \pi$, on a $r = 2$. Donc le sommet A a pour coordonnées cartésiennes $x' = -2, y' = 0$.

4) On place d'abord les sommets A et A' , puis le centre Ω à partir du foyer O car $c = 6$, et enfin les asymptotes. Le deuxième foyer est F . Voir Figure 2.32.

5) Cette équation s'écrit $\frac{(x - x_\Omega)^2}{a^2} - \frac{(y - y_\Omega)^2}{b^2} = 1$, c'est-à-dire $\frac{(x + 6)^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$.

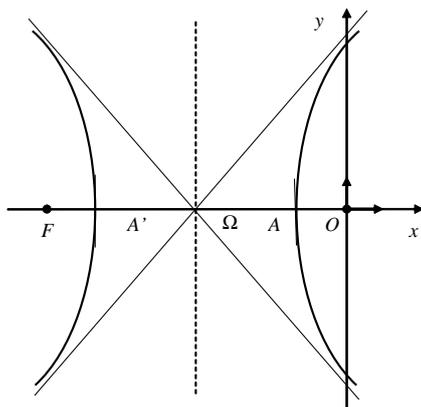


Figure 2.32

Exercice 2.10 1) On a $FM = \|\vec{FM}\| = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}$. Donc

$$FM = \sqrt{(a \cos t - c)^2 + b^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2 \cos^2 t - 2ac \cos t + c^2 + b^2(1 - \cos^2 t)}.$$

Ainsi $FM = \sqrt{b^2 + c^2 - 2ac \cos t + (a^2 - b^2) \cos^2 t}$. Mais $a^2 = b^2 + c^2$, d'où

$$FM = \sqrt{a^2 - 2ac \cos t + c^2 \cos^2 t} = \sqrt{(a - c \cos t)^2} = a - c \cos t \quad \text{car } a \geq c \cos t.$$

2) Le calcul est le même, sauf qu'on remplace c par $-c$. Donc $F'M = a - c \cos t$.

3) On a donc bien $FM + F'M = 2a$. C'est la propriété bifocale.

Exercice 2.11 Soit K le point de l'ellipse à la verticale de F' (Figure 2.33). Par définition du paramètre, $p = F'K$. Par la propriété bifocale, $FK + F'K = 2a$, donc $FK = 2a - p$. En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle $KF'F$, on a $FK^2 = F'K^2 + FF'^2$, c'est-à-dire $(2a - p)^2 = p^2 + (2c)^2$. En développant et en simplifiant par 4, on obtient $a^2 - c^2 = ap$, c'est-à-dire $b^2 = ap$, c.q.f.d.

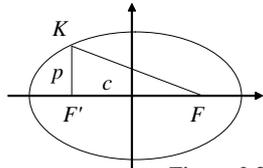


Figure 2.33

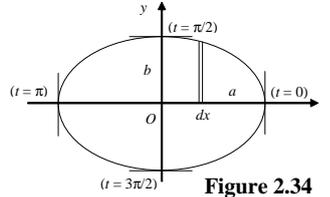


Figure 2.34

Exercice 2.12 Choisissons d'abord un point M situé dans la partie de l'hyperbole où $x \geq 0$ (Figure 2.9 page 19). Alors $x = a \operatorname{ch} t$ et $y = b \operatorname{sh} t$. Donc

$$\begin{aligned} FM &= \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = \sqrt{(a \operatorname{ch} t + c)^2 + b^2 \operatorname{sh}^2 t} \\ &= \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t + 2ac \operatorname{ch} t + c^2 + b^2 \operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{(a^2 + b^2) \operatorname{ch}^2 t + 2ac \operatorname{ch} t + c^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Or $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, donc $a^2 + b^2 = c^2$ et $c^2 - b^2 = a^2$. Par suite

$$FM = \sqrt{c^2 \operatorname{ch}^2 t + 2ac \operatorname{ch} t + a^2} = \sqrt{(c \operatorname{ch} t + a)^2} = c \operatorname{ch} t + a.$$

Le calcul de $F'M$ est le même, avec c remplacé par $-c$. Il vient

$$F'M = \sqrt{(-c \operatorname{ch} t + a)^2} = \sqrt{(c \operatorname{ch} t - a)^2} = c \operatorname{ch} t - a$$

car $c \operatorname{ch} t - a > 0$ puisque $c > a$. D'où $FM - F'M = 2a$ si $x \geq 0$ (on a alors $F'M > FM$, voir Figure 2.9). Par symétrie, on a $F'M - FM = 2a$ si $x \leq 0$. Dans ce cas $F'M - FM < 0$ et on prend les valeurs absolues pour couvrir les deux cas.

Exercice 2.13 On calcule la surface du quart d'ellipse correspondant à $x \geq 0$ et $y \geq 0$. On fait varier x de 0 à a par accroissements infinitésimaux dx (Figure 2.34). La surface de l'ellipse est la somme de toutes les surfaces des rectangles infinitésimaux ainsi formés, donc $S = 4 \int_{x=0}^{x=a} y dx$. On choisit le paramètre t comme variable d'intégration. On a $x = a \cos t$, donc $\frac{dx}{dt} = -a \sin t$ et $dx = -a \sin t dt$. De plus $y = b \sin t$. Quand x varie de 0 à a , t varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0. Donc

$$S = 4 \int_{x=0}^{x=a} y dx = 4 \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=0} (-ab \sin^2 t) dt = 4ab \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt.$$

En linéarisant $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$, on obtient $S = \pi ab$.

Exercice 2.14 Pour démontrer ce résultat, on procède comme pour la démonstration du Théorème 2.1, en gardant à l'esprit que dans cet exercice $e > 1$. On peut écrire

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \Leftrightarrow r - er \cos \theta = p.$$

Puisque $x = r \cos \theta$, il vient $r = p + ex$. En élevant au carré, on obtient $r^2 = p^2 + 2epx + e^2 x^2$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = p^2 + 2epx + e^2 x^2$. D'où l'équation cartésienne de (C) :

$$(e^2 - 1)x^2 + 2epx - y^2 = -p^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2ep}{e^2 - 1}x - \frac{y^2}{e^2 - 1} = -\frac{p^2}{e^2 - 1}.$$

On fait alors apparaître des débuts de développements de carrés. L'équation cartésienne de (C) s'écrit

$$\left(x + \frac{ep}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{e^2 p^2}{(e^2 - 1)^2} - \frac{y^2}{e^2 - 1} = -\frac{p^2}{e^2 - 1} \Leftrightarrow \left(x + \frac{ep}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{p^2}{(e^2 - 1)^2}.$$

Finalement, l'équation cartésienne de (C) est

$$\frac{\left(x + \frac{ep}{e^2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{p}{e^2 - 1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}\right)^2} = 1.$$

On voit donc que (C) est une hyperbole de centre $\Omega \left(-\frac{ep}{e^2 - 1}, 0 \right)$, avec

$$a = \frac{p}{e^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{ep}{e^2 - 1}$$

Ceci prouve bien que (C) est une hyperbole d'axe focal Ox , de foyer O (Figure 2.32). L'excentricité est $\frac{c}{a} = e$, et le paramètre est p (prendre $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans l'équation polaire).

Exercice 2.15 1) On a $r = \frac{\cos \theta}{\cos 2\theta} = \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$, donc $r \cos^2 \theta - r \sin^2 \theta = \cos \theta$.

En multipliant les deux membres par r , il vient $r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = r \cos \theta$, c'est-à-dire $x^2 - y^2 = x$.

2) Cette équation s'écrit $(x - \frac{1}{2})^2 - y^2 = \frac{1}{4}$, c'est à dire

$$\frac{(x - \frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2} - \frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1.$$

Il s'agit donc d'une hyperbole (équilatère puisque $a = b$) de centre $\Omega (\frac{1}{2}, 0)$, avec

$$a = b = \frac{1}{2}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}, \quad p = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2.16 1) (E_k) est une ellipse d'axe focal Ox puisque $k \leq 1$, avec $a = 1$ et $b = k$ (Figure 2.35). Une représentation paramétrique en est $x = \cos t$, $y = k \sin t$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

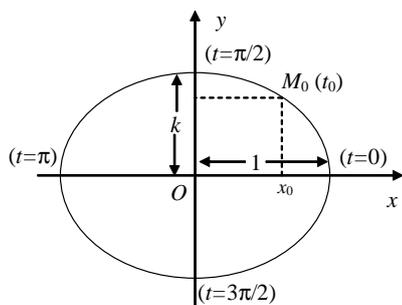


Figure 2.35

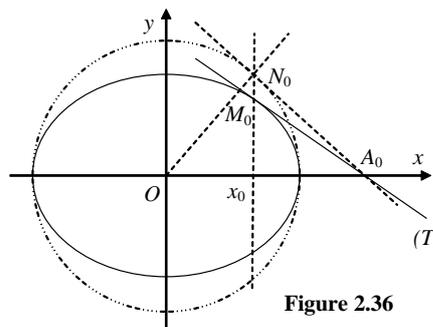


Figure 2.36

2) $x_0 \in]0, 1[$ et $y_0 > 0$ implique $t_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, c'est-à-dire $\sin t_0 > 0$. Ainsi $\sin t_0 = \sqrt{1 - \cos^2 t_0} = \sqrt{1 - x_0^2}$. Un vecteur directeur de la tangente est donc

$$\vec{T} = x'(t_0) \vec{i} + y'(t_0) \vec{j} = -\sin t_0 \vec{i} + k \cos t_0 \vec{j} = -\sqrt{1 - x_0^2} \vec{i} + kx_0 \vec{j}.$$

L'équation de la tangente (T) s'obtient en écrivant que $M \in (T)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$ et \vec{T} sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $\det(\overrightarrow{M_0M}, \vec{T}) = 0$. Donc l'équation de (T) s'écrit

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & -\sqrt{1 - x_0^2} \\ y - k\sqrt{1 - x_0^2} & kx_0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow kx_0x + \sqrt{1 - x_0^2}y - k = 0.$$

3) L'intersection de (T) avec l'axe des x s'obtient en faisant $y = 0$ dans son équation. L'abscisse a_0 de A_0 est donc $a_0 = \frac{1}{x_0}$. Elle est bien indépendante de k .

4) La construction est donnée par la Figure 2.36 : pour construire la tangente à l'ellipse au point M_0 d'abscisse x_0 , construisons d'abord le cercle (E_1) de centre O de rayon 1, qui est le cas particulier $k = 1$ de ce qui précède. L'intersection de la perpendiculaire à Ox à l'abscisse x_0 coupe (E_1) en N_0 . La perpendiculaire à (ON_0) passant par N_0 est la tangente (τ) à (E_1) en N_0 , puisque (E_1) est un cercle. D'après la question 3, (τ) coupe Ox en A_0 . Il suffit alors de tracer la droite (A_0M_0) , qui est la tangente (T) à (E_k) en M .

Exercice 2.17 1) On a $a = 2$ et $b = 1$, d'où la figure 2.37. On résout le système d'équations : $y = -x + u$; $x^2 + 4y^2 = 4$. En remplaçant y par sa valeur dans l'équation de (E) , il vient $x^2 + 4x^2 - 8ux + 4u^2 = 4$. Les abscisses x des points d'intersection de (E) et (D_u) vérifient donc $5x^2 - 8ux + 4(u^2 - 1) = 0$.

2) Le discriminant vaut $\Delta = 64u^2 - 16.5(u^2 - 1) = 16(5 - u^2)$, donc cette équation admet des solutions si $u^2 \leq 5$, c'est-à-dire si $-\sqrt{5} \leq u \leq \sqrt{5}$. Ainsi la droite (D_u) coupe d'ellipse (E) si et seulement si $-\sqrt{5} \leq u \leq \sqrt{5}$.

3) La droite (D_u) est tangente à (E) si et seulement si le point d'intersection est double, c'est-à-dire si et seulement si $\Delta = 0$, ou encore $u = \pm\sqrt{5}$.

4) On a donc ici $-\sqrt{5} < u < \sqrt{5}$.

a) L'équation a deux solutions : $x_A = \frac{2}{5}(2u + \sqrt{5 - u^2})$ et $x_B = \frac{2}{5}(2u - \sqrt{5 - u^2})$.

Les ordonnées correspondantes sont $y_A = -x_A + u = \frac{1}{5}(u - 2\sqrt{5 - u^2})$ et $y_B = -x_B + u = \frac{1}{5}(u + 2\sqrt{5 - u^2})$.

b) On en déduit immédiatement $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4}{5}u$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{5}u$.

c) En éliminant u , on voit immédiatement que $y_I = \frac{1}{4}x_I$. Donc lorsque u varie, le milieu I_u se déplace sur la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{4}x$.

d) Il est clair que le point I ne parcourt pas toute la droite (Δ) , mais seulement le segment $[KL]$ de la figure 2.37.

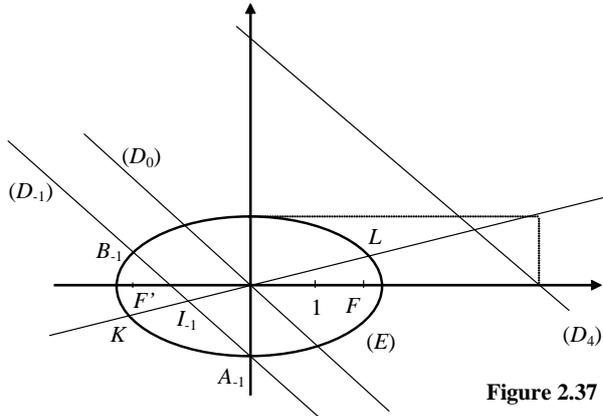


Figure 2.37

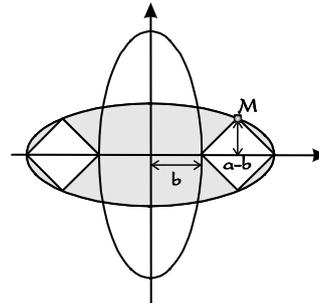


Figure 2.38

Exercice 2.18 On paramètre l'ellipse par $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Soit M le sommet du carré indiqué sur la figure 2.38. La diagonale du carré vaut $a - b$, les coordonnées de M sont donc $x_M = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$ et $y_M = \frac{a-b}{2}$. Le paramètre t du point M est donc tel que

$$\cos t = \frac{a+b}{2a} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} \text{ et } \sin t = \frac{a-b}{2b} = \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2},$$

où l'on a posé $\alpha = \frac{b}{a}$. On observe alors que

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

Ainsi $\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right)^2$. Mais

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{2\alpha + \alpha^2 - 1}{4} \text{ et } \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2\alpha + \alpha^2 - 1}{4\alpha^2}$$

On en déduit (puisque $\alpha^2 \neq 1$) que $2\alpha + \alpha^2 - 1 = 0$. C'est-à-dire, puisque $\alpha > 0$, $\frac{b}{a} = \sqrt{2} - 1 = \tan \frac{\pi}{8}$.

Exercice 2.19 Soit (E) l'ellipse de foyers A et B passant par F et (Γ) le cercle de centre C passant par F . Alors (E) et (Γ) sont tangents en F . En effet, si ce n'était pas le cas, (E) et (Γ) auraient deux points communs, dont F (Figure 2.39).

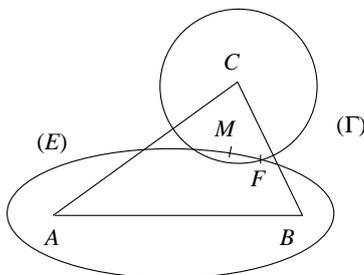


Figure 2.39

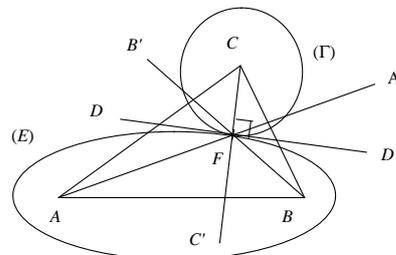


Figure 2.40

Alors le point M situé sur (E) , à l'intérieur de (Γ) , vérifierait

$$MA + MB = FA + FB \text{ [car } M \in (E)\text{]} \text{ et } MC < FC \text{ [car } M \text{ intérieur à } (\Gamma)\text{]}.$$

Alors on aurait $MA + MB + MC < FA + FB + FC$, contrairement à la définition de F . Ainsi (E) et (Γ) sont tangents en F , d'où la figure 2.40. Il en résulte que la tangente (DD') à (E) en F , qui est la bissectrice extérieure de \widehat{AFB} , est perpendiculaire à (CF) .

Ainsi $\widehat{AFC} = \widehat{AFD} + \frac{\pi}{2} = \widehat{A'FD'} + \frac{\pi}{2} = \widehat{BFD'} + \frac{\pi}{2} = \widehat{BFC}$.

Puisque A, B, C jouent des rôles symétriques, on a $\widehat{AFC} = \widehat{BFC} = \widehat{AFB}$.

On en déduit que $\widehat{AFC} = \widehat{BFC} = \widehat{AFB} = \frac{2\pi}{3}$. Ainsi, par le théorème de l'angle inscrit, F est le point d'intersection des trois cercles circonscrits au trois triangles équilatéraux construits sur les côtés du triangle (Figure 2.41). En effet, on a par exemple $\widehat{AFC} = \pi - \widehat{AB'C} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

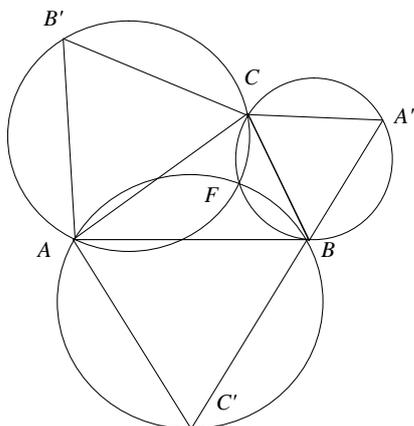


Figure 2.41

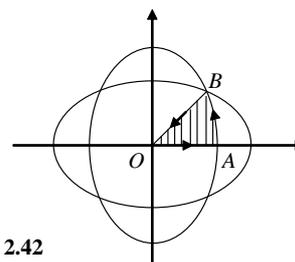


Figure 2.42

Exercice 2.20 On utilise la formule 1.24 page 11. Les symétries de la figure 2.42 montrent que

$$S = 8 \left(- \int_{\overleftarrow{C}} y dx \right) = -8 \left(\int_{\overleftarrow{AB}} y dx + \int_{\overleftarrow{BO}} y dx + \int_{\overleftarrow{OA}} y dx \right).$$

Sur l'arc \overleftarrow{OA} , on a $y = 0$, donc la troisième intégrale est nulle.

L'arc \overleftarrow{AB} correspond à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, il est donc paramétré par $x = b \cos t$ et $y = a \sin t$. Le point A correspond à $t = 0$. Cherchons la valeur du paramètre correspondant au point B .

Les coordonnées x et y de B vérifient le système

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

On a donc en multipliant la première équation par a^2 , la deuxième par b^2 , et en soustrayant :

$$y^2 \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{a^4 - b^4} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Puisque y est positif, on a donc $y = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

La valeur du paramètre t correspondant à B vérifie donc $a \sin t = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Puisque $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, il vient $t = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \tau$. Par suite

$$\begin{aligned} \int_{\overleftarrow{AB}} y dx &= \int_{t=0}^{t=\tau} a \sin t \cdot (-b \sin t) dt = -\frac{ab}{2} \int_{t=0}^{\tau} (1 - \cos 2t) dt \\ &= -\frac{ab}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\tau} = -\frac{ab}{2} [t - \sin t \cos t]_0^{\tau} \\ &= -\frac{ab}{2} \left(\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2} \right) = -\frac{ab}{2} \left(\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{ab}{a^2 + b^2} \right). \end{aligned}$$

Il reste à calculer $\int_{\overleftarrow{BO}} y dx$. Sur BO , on a $y = x$. En outre x varie de $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ à 0.

On a donc :

$$\int_{\overleftarrow{BO}} y dx = \int_{x=h}^{x=0} x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_h^0 = -\frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

On obtient finalement la surface cherchée :

$$S = 4ab \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exercice 2.21 1) On sait que l'expression complexe de r est $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$ (voir *Toutes les mathématiques* page 77). En posant $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$, on obtient :

$$x' + iy' = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (x + iy) = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (x + iy).$$

En développant et en identifiant partie réelle et partie imaginaire, on obtient l'expression analytique de r :

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

2) Exprimons x et y en fonction de x' et y' en résolvant le système d'inconnues x et y ci-dessus. On peut utiliser les formules de Cramer et on obtient l'expression analytique de r^{-1} :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \begin{vmatrix} x' & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y', \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & x' \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & y' \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'.$$

3) En remplaçant x et y en fonction de x' et y' dans l'équation de (Γ) , il vient

$$\begin{aligned} 7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow 7 \left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \right)^2 - 6\sqrt{3} \left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \right) + 13 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \right)^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow 7 \left(\frac{1}{4}x'^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x'y' + \frac{3}{4}y'^2 \right) - 6\sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}x'^2 - \frac{1}{2}x'y' + \frac{\sqrt{3}}{4}y'^2 \right) + 13 \left(\frac{3}{4}x'^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x'y' + \frac{1}{4}y'^2 \right) &= 16 \\ \Leftrightarrow 16x'^2 + 4y'^2 = 16 \Leftrightarrow x'^2 + \frac{y'^2}{2} &= 1. \end{aligned}$$

Donc (Γ') est une ellipse d'axe focal Oy' , avec $a = 2$ et $b = 1$. Comme (Γ') est l'image de (Γ) par r , on en déduit que (Γ) est l'image de (Γ') par r^{-1} , c'est-à-dire par la rotation de centre O d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Donc (Γ) est une ellipse de centre O , d'axe focal incliné à $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ par rapport à l'horizontale, avec $a = 2$ et $b = 1$ (Figure 2.43).

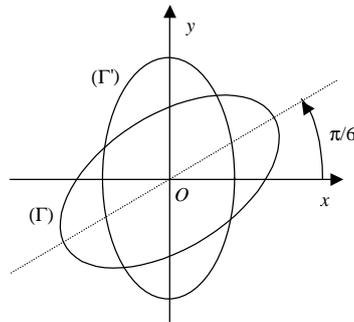


Figure 2.43

Solutions des exercices du chapitre 3

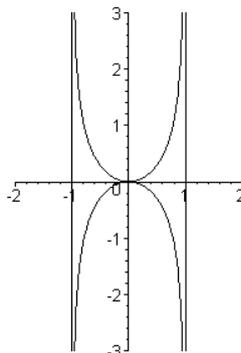
Exercice 3.1 1) On a $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$, donc la courbe est périodique de période 2π . De plus $r(\theta + \pi) = r(\theta)$, donc la courbe est symétrique par rapport à O . Enfin $r(-\theta) = -r(\theta)$, donc la courbe est symétrique par rapport à Oy . On l'étudiera donc sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On observe que r n'est pas défini pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2) On a $r'(\theta) = 1 + \tan^2 \theta$, d'où les variations de r en fonction de θ (page suivante).

Calcul de la tangente pour $\theta = 0$: $\left[\frac{d\vec{M}}{d\theta} \right]_{\theta=0} = [r'\vec{e}_r + r\vec{e}_\theta]_{\theta=0} = \vec{e}_r$. Donc la tangente est horizontale.

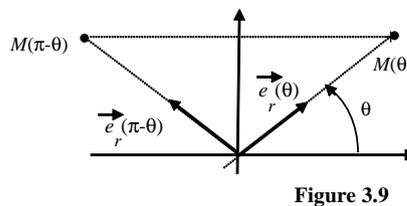
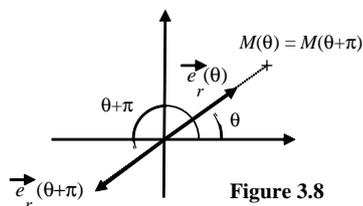
3) On a $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} x = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} r \cos \theta = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin \theta = 1$ et $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} y = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} r \sin \theta = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = +\infty$. Donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale. On en déduit la courbe (Figure 3.7).

θ	0		$\pi/2$
r'	1	+	
r	0		$+\infty$



:/sw55/temp/graphics/R5PCYL00

Exercice 3.2 1) a) On a $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$, donc il y a périodicité de 2π .
 b) On a $r(\theta + \pi) = -r(\theta)$, donc les points $M(\theta)$ et $M(\theta + \pi)$ sont identiques (Figure 3.8 : $\vec{e}_r(\theta)$ et $\vec{e}_r(\theta + \pi)$ sont opposés, donc le fait de reporter des valeurs de r également opposées conduit au même point). On étudie donc la courbe sur un intervalle de longueur π .



c) De même $r(\pi - \theta) = r(\theta)$, donc les points $M(\theta)$ et $M(\pi - \theta)$ sont symétriques par rapport à l'axe des y (Figure 3.9). La courbe admet donc l'axe des y pour axe de symétrie.

d) Enfin $r(-\theta) = -r(\theta)$, ce qui redonne l'axe des y comme axe de symétrie (faire un dessin). On étudiera donc r en fonction de θ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis on complètera la courbe par symétrie par rapport à Oy .

2) On a $r' = \cos \theta \cos 2\theta - 2 \sin \theta \sin 2\theta = \cos \theta \cos 2\theta - 4 \sin^2 \theta \cos \theta = \cos \theta (\cos 2\theta - 4 \sin^2 \theta) = \cos \theta (1 - 6 \sin^2 \theta)$.

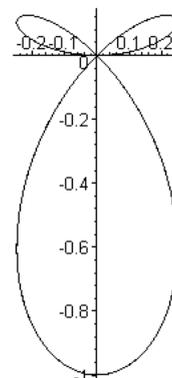
Donc sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ la dérivée s'annule pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ (à cause du cosinus) et pour $\theta_0 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}} \simeq 0,42 \text{ rad} \simeq 24,1^\circ$.

Puisque $r = \sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)$, on a $r(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{6}} (1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3\sqrt{6}} \simeq 0,27$.

En outre, sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, r s'annule pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Les tangentes respectives en ces points sont les droites $\theta = 0$ (axe des x) et $\theta = \frac{\pi}{4}$ (première bissectrice) en vertu du théorème 3.1. D'où le tableau des variations de r en fonction de θ :

θ	0	θ_0	$\pi/4$	$\pi/2$		
r'		+	0	-	-	0
r	0	$0,27$	0	-1		



3) La tangente pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ est dirigée suivant \vec{e}_θ puisque r' s'annule mais pas r (appliquer (3.6)), c'est-à-dire qu'elle est horizontale. En plaçant soigneusement les éléments du tableau de variations et en faisant tourner θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on obtient la première moitié de la courbe, qu'on complète par symétrie par rapport à Oy .

4) On a vu que $r = \sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)$. Or $\sin \theta = \frac{y}{r}$, donc $r^2 = y \left(1 - 2 \frac{y^2}{r^2} \right)$.

Puisque $r^2 = x^2 + y^2$, on obtient l'équation cartésienne

$$(x^2 + y^2)^2 = y(x^2 - y^2).$$

Exercice 3.3 1) On a $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$, donc il y a périodicité de 2π .

On a $r(\theta + \pi) = r(\theta)$, donc la courbe est symétrique par rapport à O (Figure 3.3 page 29).

On a $r(\frac{\pi}{2} - \theta) = r(\theta)$; la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice (Figure 3.10 ci-dessous).

Enfin $r(-\theta) = r(\theta)$, donc la courbe est symétrique par rapport à Ox (Figure 3.4 page 29).

On étudiera donc r en fonction de θ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, c'est-à-dire sur la partie A (Figure 3.11). En effet, la symétrie par rapport à Ox donnera la courbe pour $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, c'est-à-dire sur les parties A + B. Puis la symétrie par rapport à la première bissectrice donnera la courbe pour $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, c'est-à-dire sur les parties A + B + C. Enfin la symétrie de centre O donnera la courbe sur A + B + C + D, c'est-à-dire toute la courbe.

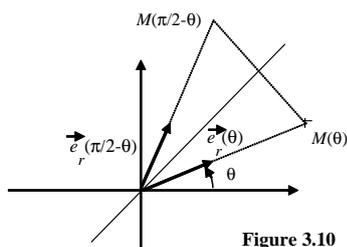


Figure 3.10

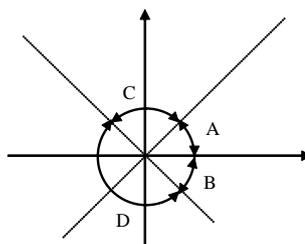


Figure 3.11

2) On a $r' = -4 \sin 4\theta$. Donc sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ on a $r' < 0$ sauf en 0 et $\frac{\pi}{4}$ où $r' = 0$.

Cherchons pour quelles valeurs de θ le point M passe par O . Sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, $\cos 4\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8}$.

En ce point, la tangente est la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\pi}{8}$ (Théorème 3.1).

θ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
r'	0	-	-
r	1	0	
			-1

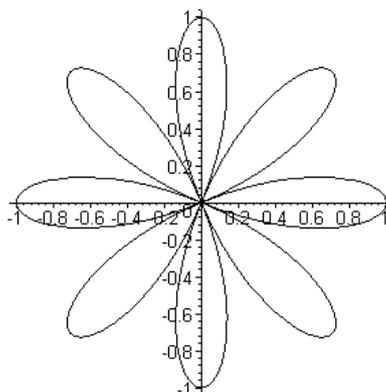


Figure 3.12

3) La tangente pour $\theta = 0$ est dirigée suivant \vec{e}_θ car r' s'annule mais pas r (appliquer (3.6)), elle est donc verticale. De même la tangente pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ est dirigée orthogonalement à la droite $\theta = \frac{\pi}{4}$. D'où la courbe (Figure 3.12).

4) On a $r(\theta + \frac{\pi}{4}) = -r(\theta)$. Cela signifie que, lorsqu'on fait tourner le vecteur \vec{e}_r d'un angle $+\frac{\pi}{4}$, le point M tourne de $+\frac{\pi}{4}$ puis se symétrise par rapport à O . Autrement dit la courbe est invariante par $s_O \circ \rho$, où ρ est la rotation de centre O d'angle $+\frac{\pi}{4}$. Mais comme la courbe est aussi invariante par s_O (Question 1), elle est donc invariante par $s_O \circ s_O \circ \rho = \rho$ car $s_O \circ s_O = \text{Id}$.

5) Cette surface S vaut 16 fois la surface balayée lorsque θ varie de 0 à $\frac{\pi}{8}$. Donc

$$S = 16 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{8}} r^2 d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 4\theta d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{8}} (1 + \cos 8\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3.4 1) On a d'abord $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$. Donc on peut étudier la courbe sur $[-\pi, \pi]$. Comme on a aussi $r(-\theta) = r(\theta)$, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x , et on l'étudie sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Sur cet intervalle, on doit exclure la valeur $\theta = \frac{\pi}{2}$, qui annule le cosinus.

2) La courbe passe par l'origine du repère lorsque $r = 0$, c'est-à-dire $\cos \theta_0 = -\frac{1}{2}$.

Sur l'intervalle $[0, \pi]$, la seule solution de cette équation est $\theta_0 = \frac{2\pi}{3}$.

3) On a $r' = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$, qui est positif sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}, \pi \right]$.

On en déduit les variations de r en fonction de θ .

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r'	0	+	+	0
r	3	$+\infty$	0	1

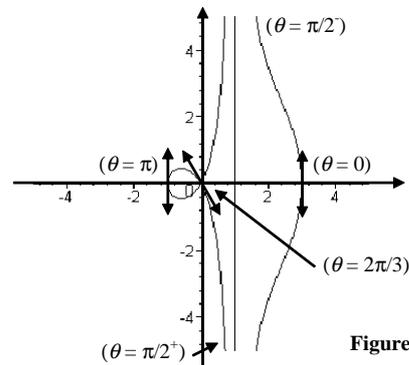


Figure 3.13

4) On a $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} x = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2 \cos \theta + 1) = 1$ et $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} y = \infty$. D'où une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

5) La tangente à la courbe en O forme un angle de $\frac{2\pi}{3}$ avec l'axe des x (Théorème 3.1).

Pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, les tangentes sont dirigées suivant \vec{e}_θ , donc verticales. D'où la courbe (Figure 3.13).

Exercice 3.5 1) On a $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$, donc il y a périodicité de 2π .

On a $r(\theta + \pi) = -r(\theta)$, donc il y a en fait périodicité de π (voir Exercice 3.2, Question 1).

On a $r\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r(\theta)$; la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice (voir Exercice 3.3, Question 1). Par contre $r(-\theta)$ ne donne aucune symétrie. On étudiera r en fonction de θ sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, c'est-à-dire sur la partie A de la figure 3.14. En effet, la symétrie par rapport à la première bissectrice donnera la courbe pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, c'est-à-dire sur les parties A + B. Comme A + B représente un angle de π radians, on aura la courbe en entier. On notera que la valeur $\theta = -\frac{\pi}{4}$ doit être exclue.

2) On calcule la dérivée de r en fonction de θ

$$r' = \frac{2 \cos 2\theta (\cos \theta + \sin \theta) - \sin 2\theta (\cos \theta - \sin \theta)}{(\cos \theta + \sin \theta)^2}$$

$$= \frac{2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\cos \theta + \sin \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta)}{(\cos \theta + \sin \theta)^2} = 2 \frac{\cos^3 \theta - \sin^3 \theta}{(\cos \theta + \sin \theta)^2}$$

Lorsque $\theta \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$, $\cos^3 \theta - \sin^3 \theta$ s'annule si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Par ailleurs $r = 0$ si et seulement si $\theta = 0$. Le théorème 3.1 s'applique alors et la tangente en O est horizontale, d'équation polaire $\theta = 0$. D'où le tableau de variations.

θ	$-\pi/4$	0	$\pi/4$
r'		+	+
r	$-\infty$	0	0,7

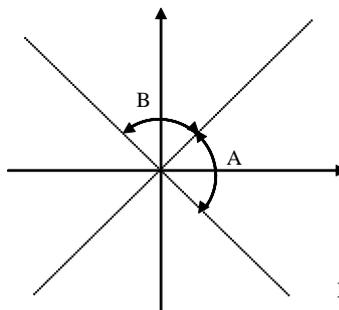


Figure 3.14

3) Il apparaît une branche infinie lorsque $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}$. On a d'abord

$$\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}} x = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}} r \cos \theta = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2\theta \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}} y = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}} r \sin \theta = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2\theta \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \infty.$$

Recherchons s'il existe une asymptote oblique en calculant

$$\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{y}{x} = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \tan \theta = -1, \quad \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}} (y + x) = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}} [r(\sin \theta + \cos \theta)] = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \sin 2\theta = -1$$

Donc il existe une asymptote oblique, d'équation $y = -x - 1$. On trace alors la courbe (Figure 3.15).

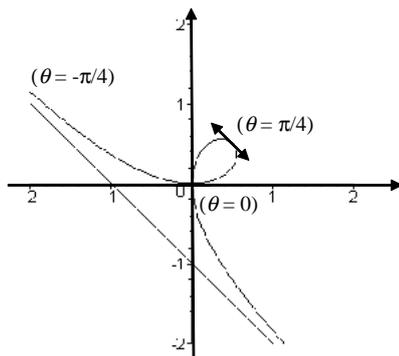


Figure 3.15

4) En multipliant numérateur et dénominateur par r , l'équation polaire s'écrit

$$r = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \Leftrightarrow r^2 = \frac{2r \sin \theta r \cos \theta}{r \cos \theta + r \sin \theta}.$$

Puisque $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, l'équation cartésienne est $(x^2 + y^2)(x + y) = 2xy$.

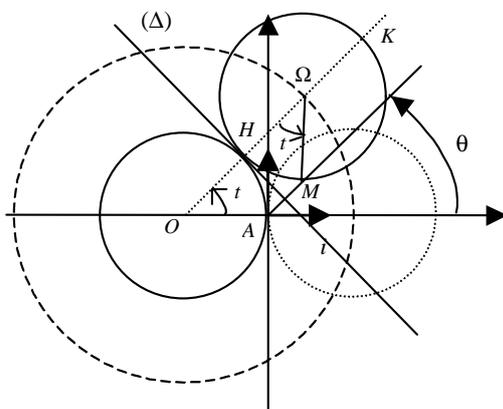


Figure 3.16

Exercice 3.6 On considère la figure 3.16. Le pôle est ici le point A. On veut $\overrightarrow{AM} = r\overrightarrow{e_r}$ en fonction de θ . On a

$$\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|} = \cos \theta \overrightarrow{i} + \sin \theta \overrightarrow{j}.$$

Soit (Δ) la perpendiculaire à $(O\Omega)$ passant par H . Alors $(\Delta) \perp (O\Omega)$. Mais par symétrie, l'égalité des arcs de cercle HA et HM entraîne que $(AM) \perp (\Delta)$. Donc les droites $(O\Omega)$ et (AM) sont parallèles. Il en résulte que $\theta = t$, où t est le paramètre qui avait servi à trouver l'équation cartésienne de la cardioïde. De plus, on a

$$\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{AO}\right) = \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO}\right) = \pi - \theta.$$

Travaillons dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ et utilisons la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = R(\cos(\pi - \theta)\overrightarrow{e_r} + \sin(\pi - \theta)\overrightarrow{e_\theta}) + 2R\overrightarrow{e_r} + R(\cos(\pi + \theta)\overrightarrow{e_r} + \sin(\pi + \theta)\overrightarrow{e_\theta}) \\ &= R(-\cos \theta \cdot \overrightarrow{e_r} + \sin \theta \cdot \overrightarrow{e_\theta}) + 2R\overrightarrow{e_r} - R(\cos \theta \cdot \overrightarrow{e_r} + \sin \theta \cdot \overrightarrow{e_\theta}) = 2R(1 - \cos \theta)\overrightarrow{e_r}. \end{aligned}$$

Donc l'équation polaire de la cardioïde est $r = 2R(1 - \cos \theta)$.

2) La surface intérieure de la cardioïde vaut deux fois l'aire balayée lorsque θ varie de 0 à π .

Donc, puisque $r = 2R(1 - \cos \theta)$,

$$S = \int_0^\pi r^2 d\theta = 4R^2 \int_0^\pi (1 - \cos \theta)^2 d\theta = 4R^2 \int_0^\pi (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta.$$

On linéarise $\cos^2 \theta$ et on retrouve le résultat de l'exemple 1.4 :

$$S = 4R^2 \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} - 2\cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = 6\pi R^2.$$

3) Puisque $r = 2R(1 - \cos \theta)$, $r' = 2R \sin \theta$ et on retrouve le résultat de l'exercice 1.8 :

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = 4R \int_0^\pi \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta = 4\sqrt{2}R \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta \\ &= 8R \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 8R \int_0^\pi \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 8R \left[-2 \cos \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi = 16R. \end{aligned}$$

Exercice 3.7 \vec{a} et $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ sont colinéaires si et seulement si la composante de \vec{a} suivant \vec{e}_θ est nulle. Ainsi

$$\vec{a} \text{ et } \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \text{ colinéaires} \Leftrightarrow 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0. \quad (3.16)$$

Or en utilisant (3.15) on a

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2} r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2} r \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right). \quad (3.17)$$

Par conséquent en vertu de (*) et (***) il vient

$$\mathcal{A} = cte \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{A}}{dt} = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \text{ et } \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \text{ colinéaires.}$$

Ceci est un des résultats fondamentaux de la théorie des mouvements à force centrale.

Exercice 3.8 Dans le cas de l'ellipse, on travaille en coordonnées cartésiennes avec $x = 4 \cos t$, $y = \sin t$, $x' = -4 \sin t$, $y' = \cos t$. La longueur de l'ellipse vaut

$$L_1 = \int_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{16 \sin^2 t + \cos^2 t} dt.$$

Cette intégrale ne peut pas se calculer à partir des fonctions élémentaires que nous connaissons (il faut introduire de nouvelles fonctions, dites *elliptiques*, qui dépassent de très loin le cadre de ce livre). Nous gardons donc L_1 sous forme d'intégrale (on pourrait en trouver une valeur numérique approchée).

Dans le cas de la courbe d'équation polaire $r = \cos 4\theta$ de l'exercice 3.3, en tenant compte des symétries de la courbe on a

$$L_2 = 4 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \|\overrightarrow{dM}\| = 4 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = 4 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 4\theta + 16 \sin^2 4\theta} d\theta.$$

Il est naturel de poser le changement de variable $u = 4\theta$. Il vient

$$L_2 = \int_{u=0}^{u=2\pi} \sqrt{\cos^2 u + 16 \sin^2 u} du = L_1.$$

Exercice 3.9 1) La figure 3.17 permet d'étudier les composées de s_O , s_{Ox} et s_{Oy} .

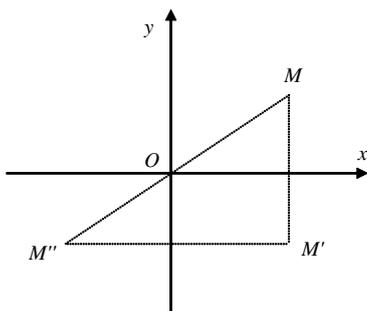


Figure 3.17

Par exemple on voit que M est transformé en M' par s_{Ox} , puis que M' est transformé en M'' , symétrique de M par rapport à O , par s_{Oy} . Donc $s_O = s_{Oy} \circ s_{Ox}$. Par ailleurs, si on transforme M par s_O puis de nouveau par s_O , par exemple, il est clair qu'il est inchangé. La transformation du plan qui laisse tous les points inchangés s'appelle l'*identité* et se note Id (on peut la concevoir comme la translation de vecteur nul, par exemple). On remplit ainsi le tableau suivant.³

\circ	s_O	s_{Ox}	s_{Oy}
s_O	Id	s_{Oy}	s_{Ox}
s_{Ox}	s_{Oy}	Id	s_O
s_{Oy}	s_{Ox}	s_O	Id

³En fait, $G = \{\text{Id}, s_O, s_{Ox}, s_{Oy}\}$ est un groupe pour la loi \circ : voir *Toutes les mathématiques*, Exercice 27.7 page 333.

2) Si une courbe est symétrique par rapport à deux des trois éléments O , Ox ou Oy , elle est invariante si on la transforme par les deux symétries correspondantes s_1 et s_2 . Elle est donc aussi invariante par leur composée $s_3 = s_2 \circ s_1$, c'est-à-dire qu'elle est symétrique par rapport au troisième élément. D'où le théorème 3.2.

Exercice 3.10 1) D et D' sont concourantes si elles ne sont pas parallèles. Elles sont parallèles si $3\theta = \theta + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), c'est-à-dire si $\theta = k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Puisque $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, D et D' sont toujours concourantes, sauf si $\theta = 0$.

2) On a $D : y = (\tan \theta)x$ et $D' : y = (\tan 3\theta)(x - a)$. L'abscisse x de M vérifie $x \tan \theta = (x - a) \tan 3\theta$, donc

$$x = a \frac{\tan 3\theta}{\tan 3\theta - \tan \theta}, \quad y = a \frac{\tan \theta \tan 3\theta}{\tan 3\theta - \tan \theta}.$$

3) On a $x = r \cos \theta$, donc $r = x / \cos \theta$. En utilisant la valeur de x trouvée à la question précédente, on obtient

$$r = a \frac{\tan 3\theta}{\cos \theta \tan 3\theta - \sin \theta} = a \frac{\sin 3\theta}{\cos \theta \sin 3\theta - \sin \theta \cos 3\theta} = a \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}.$$

Or $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ et $\sin 3\theta = \sin \theta \cos 2\theta + \cos \theta \sin 2\theta$, donc

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta} = \frac{\sin \theta \cos 2\theta + \cos \theta \sin 2\theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} + \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{\cos \theta} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} \right) = 2 \cos \theta - \frac{1}{2 \cos \theta}.$$

Donc on a bien $r = a \left(2 \cos \theta - \frac{1}{2 \cos \theta} \right)$.

4) On a $r(\theta + \pi) = -r(\theta)$, donc la courbe est périodique de période π . Par ailleurs, $r(-\theta) = r(\theta)$, donc symétrie par rapport à $x'Ox$. On l'étudie sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$, où on a

$$r' = a \left(-2 \sin \theta - \frac{\sin \theta}{2 \cos^2 \theta} \right) \leq 0.$$

De plus, r s'annule pour une valeur θ_0 vérifiant

$$2 \cos \theta_0 - \frac{1}{2 \cos \theta_0} = 0 \Leftrightarrow \cos \theta_0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{3}.$$

En ce point, la tangente a un angle polaire de $\frac{\pi}{3}$ (Théorème 3.1). D'où les variations.

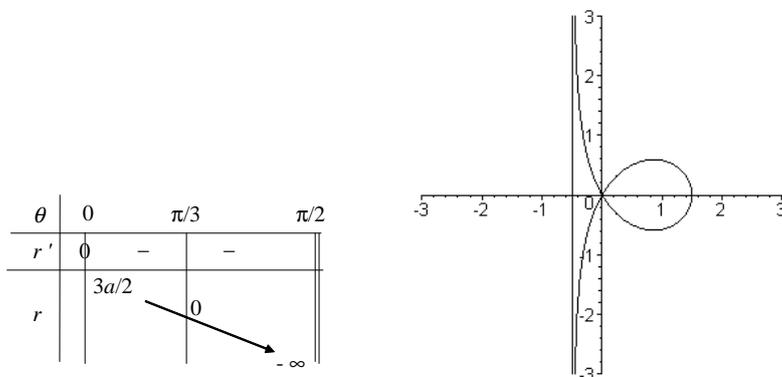


Figure 3.18

Étudions la branche infinie qui apparaît lorsque $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. On a

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} x = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} r \cos \theta = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} a \left(2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) = -\frac{a}{2}, \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} y = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} r \sin \theta = -\infty.$$

Donc la droite d'équation $x = -\frac{a}{2}$ est asymptote verticale. On trace ensuite la courbe (Figure 3.18, ici $a = 1$).

5) L'examen de la courbe montre que

$$\begin{aligned} S &= \int_{\theta=-\frac{\pi}{3}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(4 \cos^2 \theta - 2 + \frac{1}{4 \cos^2 \theta} \right) d\theta \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos 2\theta + \frac{1}{8 \cos^2 \theta} \right) d\theta = a^2 \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{8} \tan \theta \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2. \end{aligned}$$

Exercice 3.11 Considérons l'ellipse (E) de paramètre $p = 2$ et d'excentricité e . Son équation polaire est

$$r = \frac{2}{1 - e \cos \theta},$$

et l'ellipse tout entière est décrite lorsque θ varie entre 0 et 2π . L'intégrale cherchée vaut donc

$$I = \frac{1}{4} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{8} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{4} \pi ab.$$

Or on sait que

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{b^2}{a^2} = p = 2.$$

Il en résulte que

$$a = \frac{2}{1 - e^2}, \quad b = \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad I = \frac{\pi}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Exercice 3.12 1) Soient (r, θ) et (r', θ') les coordonnées polaires de M et $M' = \rho(M)$ respectivement. Il résulte alors immédiatement de la définition de l'inversion que

$$r' = \frac{1}{r} \text{ et } \theta' = \theta \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{r'} \text{ et } \theta = \theta'.$$

Donc ρ est clairement bijective de (P^*) dans (P^*) et $\rho^{-1} = \rho$, ce qui signifie que ρ est involutive de (P^*) dans (P^*) . D'autres exemples d'involutions sont les symétries par rapport à un point A ou par rapport à une droite (D) : il s'agit dans ce cas d'involutions de (P) dans (P) .

2) On utilise les équations polaires des exemples 3.1 et 3.2 :

$$r = \frac{c}{a \cos \theta + b \sin \theta} \Leftrightarrow \frac{1}{r'} = \frac{c}{a \cos \theta' + b \sin \theta'} \Leftrightarrow r' = \frac{a}{c} \cos \theta' + \frac{b}{c} \sin \theta'.$$

Donc l'image d'une droite (D) ne passant pas par O est un cercle passant par O privé de O . En effet $r' \neq 0$ car $r' = 0 \Leftrightarrow a \cos \theta' + b \sin \theta' \Leftrightarrow a \cos \theta + b \sin \theta = 0$, ce qui est impossible. En fait on voit que $M' \rightarrow 0$ quand $M \rightarrow \infty$ sur la droite (D) ⁴.

3) L'équation polaire de l'hyperbole équilatère (H) d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$ s'écrit

$$r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 1 \Leftrightarrow r^2 \cos 2\theta = 1.$$

L'image $M'(r', \theta')$ de $M(r, \theta)$ par l'inversion vérifie donc $r'^2 = \cos 2\theta'$, c'est-à-dire $r' = \sqrt{\cos 2\theta'}$. Il s'agit donc de la lemniscate de Bernoulli, privée de l'origine O (comme dans la question précédente, $M' \rightarrow 0$ quand $M \rightarrow \infty$ sur l'hyperbole (H)).

⁴Voir le supplément *Inversion complexe*.

Index

- Abscisse curviligne, 7
- Accélération (Frénet), 9
- Affinité, 14
- Arche de cycloïde, 6

- Base de Frénet, 8
- Base mobile, 8
- Branche infinie, 4, 30

- Cône de révolution, 21
- Cardioïde, 2
- Conique, 14, 16
- Courbe paramétrée, 1
- Courbes de Lissajous, 11
- Courbure, 9
- Cycloïde, 6

- Dérivée d'un vecteur unitaire, 8
- Diagramme de Clapeyron, 11
- Directrice d'une conique, 23

- Ellipse, 14
- Epicycloïde, 7
- Equation cartésienne d'une ellipse, 14
- Equation paramétrique d'un cercle, 1
- Equation paramétrique d'une droite, 1
- Equation paramétrique d'une ellipse, 14
- Equation polaire d'un cercle, 28
- Equation polaire d'une droite, 28
- Equation polaire d'une ellipse, 16
- Equation polaire d'une parabole, 17
- Excentricité d'une ellipse, 15

- Folium de Descartes, 12
- Foyer d'une parabole, 17
- Foyers d'une ellipse, 15

- Génératrice, 21
- Grand axe, 15

- Hyperbole, 17

- Inversion, 34
- Involution, 55
- Involutive, 34

- Lemniscate de Bernoulli, 28
- Lois de Képler, 31
- Longueur d'un arc, 10, 31

- Mouvement à force centrale, 16

- Mouvements à force centrale, 14, 31

- Néphroïde, 13
- Normal (Vecteur -), 8, 9

- Ovale des jardiniers, 15

- Paramètre d'une ellipse, 16
- Paramètre d'une parabole, 17
- Petit axe, 15
- Point de Fermat, 26
- Point de rebroussement, 6
- Point régulier, 8
- Point singulier, 3
- Propriété bifocale, 15

- Réduction du domaine d'étude, 2
- Rayon de courbure, 9, 32

- Sections coniques, 21
- Signe d'une fonction sinusoïdale, 2
- Surface balayée, 31
- Surface de l'ellipse, 25
- Surface intérieure à une courbe fermée, 10, 31
- Symétries (équation paramétrique), 2
- Symétries (équation polaire), 28

- Tableau de variations simultanées, 3
- Tangent (Vecteur -), 8
- Tangente, 3, 28
- Tangente à l'ellipse, 25
- Trajectoire, 1

- Vecteur tangent, 3, 28
- Vitesse (Frénet), 8
- Vitesse aréolaire, 31, 33