

Calcul différentiel et intégral pour la physique

Daniel Duverney

© <http://touteslesmaths.fr>

22 août 2021

Avant-propos

Le but de ce complément est de proposer une introduction aussi simple et intuitive que possible aux principaux outils de calcul différentiel et intégral utiles en physique.

Il s'agit essentiellement de notions de calcul différentiel et intégral dans l'espace à trois dimensions. Les objets mathématiques manipulés dans ce cadre sont les *fonctions de plusieurs variables* et les *champs de vecteurs*.

Le calcul différentiel et intégral dans l'espace fait ainsi intervenir à la fois des formes différentielles et des intégrales curvilignes (Chapitre 1), des intégrales doubles et triples (Chapitres 2 et 3) et de l'analyse vectorielle (Chapitre 4).

Les intégrales doubles et triples ont en outre de nombreuses applications en mécanique et en géométrie.

Table des matières

Avant-propos	i
Chapitre 1 : Différentielles et champs de vecteurs	1
1.1 Différentielle d'une fonction	1
1.2 Variables liées	2
1.3 Expression intrinsèque de la différentielle	4
1.4 Champs de vecteurs	5
1.5 Circulation d'un champ de vecteurs	5
1.6 Différentielle exacte et potentiel scalaire	7
Exercices	9
Chapitre 2 : Intégrales doubles	11
2.1 Notion d'intégrale double	11
2.2 Calcul en coordonnées cartésiennes	12
2.3 Calcul en coordonnées polaires	13
2.4 Intégrale double sur un pavé	15
2.5 Formule de Green-Riemann	15
Exercices	17
Chapitre 3 : Intégrales triples	20
3.1 Notion d'intégrale triple	20
3.2 Calcul en coordonnées cartésiennes	22
3.3 Calcul en coordonnées cylindriques	23
3.4 Calcul en coordonnées sphériques	24
3.5 Centre d'inertie d'un solide	25
3.5.1 Solide idéal	25
3.5.2 Solide réel	26
3.5.3 Théorèmes de Pappus-Guldin	28
Exercices	29
Chapitre 4 : Analyse vectorielle	32
4.1 Opérateurs de l'analyse vectorielle	32
4.2 Surfaces de l'espace	33
4.2.1 Représentation d'une surface	33
4.2.2 Vecteur normal à une surface	34
4.2.3 Lignes de champs et surfaces équipotentiels	35
4.2.4 Intégrales de surface	36
4.3 Flux d'un champ de vecteurs	37
4.4 Formules de Stokes et d'Ostrogradski	37
4.4.1 Expression intrinsèque de la divergence	37
4.4.2 Expression intrinsèque du rotationnel	39
4.4.3 Formules de Stokes et d'Ostrogradski	40
4.4.4 Champs à flux conservatif	40
4.5 Angle solide	41
Exercices	42

Solutions des exercices	44
Exercices du chapitre 1	44
Exercices du chapitre 2	47
Exercices du chapitre 3	50
Exercices du chapitre 4	55
Index	60

Chapitre 1

Différentielles et champs de vecteurs

Ce chapitre présente de manière intuitive et pratique les notions de base permettant de manipuler les fonctions de plusieurs variables et les champs de vecteurs¹. Après l'avoir étudié, vous devez :

- A. Connaître la formule qui donne la différentielle d'une fonction de deux ou trois variables et savoir l'utiliser dans des applications simples.
- B. Connaître la différence entre variables indépendantes et variables liées.
- C. Savoir ce qu'est le gradient d'une fonction de trois variables et connaître son lien avec la différentielle.
- D. Savoir ce qu'est une forme différentielle et savoir calculer des intégrales curvilignes simples.
- E. Savoir ce que sont un champ de vecteurs et un potentiel scalaire.
- F. Savoir ce qu'est une différentielle exacte et savoir calculer un potentiel scalaire dans des cas simples.

1.1 Différentielle d'une fonction

Considérons d'abord une fonction d'une seule variable $U = f(x)$. Si nous donnons à x un accroissement infinitésimal dx , alors U subit un accroissement infinitésimal dU . Cet accroissement infinitésimal s'appelle la *différentielle* de U au point x . Puisque $f'(x) = \frac{dU}{dx}$, il vient

$$dU = f'(x) dx. \quad (1.1)$$

Considérons maintenant une fonction de deux variables. On sait (Section 11.5 de *Toutes les mathématiques*) qu'une telle fonction s'écrit sous la forme $U = f(M)$, où M est un point du plan (Figure 1.1). Si nous désignons par x et y les coordonnées cartésiennes de M dans ce plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a $U = f(x, y)$.

Appliquons à M un déplacement infinitésimal \overrightarrow{dM} , qui correspond à un accroissement infinitésimal dx de x et à un accroissement infinitésimal dy de y . Alors U subit un accroissement infinitésimal dU , qui s'appelle la *différentielle* de U (calculée au point M). On peut déterminer cet accroissement infinitésimal de la façon suivante. Fixons y et augmentons x de dx . Alors U devient fonction de x seulement. Donc (1.1) s'applique, sauf que la dérivée qui intervient est la dérivée de U à y constant, c'est-à-dire la dérivée partielle $\frac{\partial U}{\partial x}$ (Section 11.5 de *Toutes les mathématiques*). En notant par un indice y le fait qu'on travaille à y constant, il vient

$$dU_y = \frac{\partial U}{\partial x} dx. \quad (1.2)$$

De même, si on fixe x et qu'on fait varier y de dy , l'accroissement infinitésimal de U à x constant, que nous notons dU_x , vaut

$$dU_x = \frac{\partial U}{\partial y} dy. \quad (1.3)$$

Or x et y peuvent varier *indépendamment l'un de l'autre*, donc l'accroissement total dU sera la *somme* des accroissements dU_x à y constant et dU_y à x constant. D'où la formule fondamentale :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy. \quad (1.4)$$

¹Pour une présentation plus théorique des fonctions de deux variables et de la notion de différentielle, on se reportera au chapitre 33 de *Toutes les mathématiques*.

Bien entendu, cette formule reste valable pour n'importe quel couple de variables. Si U est considéré comme une fonction des coordonnées polaires r et θ par exemple, on a de même

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta.$$

Dans le cas d'une fonction de 3 variables $U = f(M) = f(x, y, z)$, le même raisonnement montre que

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz. \quad (1.5)$$

Les règles de calcul sur les différentielles sont similaires à celles sur les dérivées (Exercice 1.1). Notamment on a

$$\begin{cases} d(U + V) = dU + dV \\ d(\lambda U) = \lambda dU \\ d(UV) = (dU) \cdot V + U \cdot (dV) \end{cases} \quad (\lambda = \text{constante}) \quad (1.6)$$

Enfin, lorsque le point M se déplace dans une partie \mathcal{A} du plan ou de l'espace, la fonction U reste constante si et seulement si elle ne varie pas (comme dirait Monsieur de La Palisse). Par conséquent

$$U \text{ constante dans } \mathcal{A} \Leftrightarrow dU = 0 \text{ en tout point de } \mathcal{A}.$$

On notera que l'idée d'un point M qui se déplace dans une partie \mathcal{A} du plan sous-entend que cette partie est en *un seul morceau*. Mathématiquement, on dit qu'elle est *connexe*.

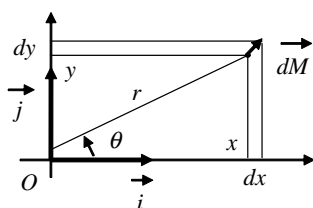


Figure 1.1

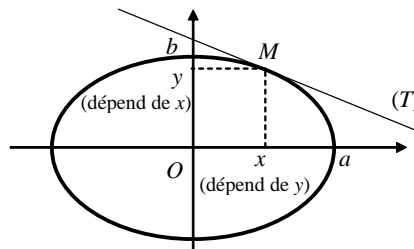


Figure 1.2

Remarque 1.1 Dans certains cas l'accroissement absolu dU n'a pas grand sens, et on s'intéresse plutôt à l'accroissement relatif $\frac{dU}{U}$. Celui-ci s'appelle la *différentielle logarithmique* de U . En effet (Exercice 1.2), on peut écrire

$$\frac{dU}{U} = d(\ln |U|). \quad (1.7)$$

La différentielle logarithmique est bien adaptée aux calculs sur les produits de fonctions. En effet (Exercice 1.2), la différentielle logarithmique d'un produit est égale à la somme des différentielles logarithmiques :

$$\frac{d(UV)}{UV} = \frac{dU}{U} + \frac{dV}{V}. \quad (1.8)$$

1.2 Variables liées

Dans certains problèmes, le point M du plan est assujéti à se déplacer le long d'une courbe (C) d'équation $F(x, y) = 0$. Dans ce cas, les variables x et y ne sont pas indépendantes. On dit qu'elles sont *liées*. En différentiant l'équation $F(x, y) = 0$, on obtient une relation entre dx et dy lorsque $M(x, y)$ se déplace le long de (C) .

Exemple 1.1 Soit $0 < a \leq b$. On suppose que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cela signifie que le point $M(x, y)$ se déplace sur l'ellipse² (E) de la figure 1.2. Ainsi y peut être considéré comme une fonction de x , et inversement. Lors de ce déplacement, la fonction

$$G(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

reste constante et égale à 1. Par suite, sa différentielle dG est nulle, c'est-à-dire

$$\frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy = \frac{2x}{a^2} dx + \frac{2y}{b^2} dy = 0.$$

Au point M de coordonnées (x, y) , on a donc

$$\frac{2y}{b^2} dy = -\frac{2x}{a^2} dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}. \quad (1.9)$$

Géométriquement, ceci donne évidemment le coefficient directeur de la tangente à (E) au point M de coordonnées (x, y) .

De même, trois variables x , y et z sont *liées* si elle vérifient une relation de la forme $F(x, y, z) = 0$. Géométriquement, ceci peut s'interpréter en disant que le point M est assujéti à se déplacer sur une surface de l'espace (par exemple le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ ou la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$). Ainsi, en thermodynamique, les trois variables p (pression), V (volume) et T (température) sont liées par une *équation d'état*, qu'on écrit

$$F(p, V, T) = 0. \quad (1.10)$$

Par exemple, pour les gaz parfaits, $pV = nRT$. En différentiant l'équation d'état (1.10), on obtient

$$dF = \frac{\partial F}{\partial p} dp + \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial T} dT = 0.$$

Supposons maintenant que la variable T reste *constante*, tandis que les deux variables p et V qui lui sont liées continuent à varier. Dans ce cas on a $dT = 0$ et p devient donc une fonction de V . Donc l'équation ci-dessus s'écrit

$$\frac{\partial F}{\partial p} dp + \frac{\partial F}{\partial V} dV = 0.$$

Il en résulte que

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial V}}{\frac{\partial F}{\partial p}}.$$

Or cette dérivée n'est autre que la dérivée partielle de p (qui est normalement fonction de V et T par l'équation d'état (1.10) par rapport à V lorsque T est maintenu constant. En utilisant pour traduire ce fait la notation indicielle déjà utilisée dans (1.2) et (1.3), on obtient

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \frac{dp}{dV} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial V}}{\frac{\partial F}{\partial p}}.$$

En permutant circulairement les lettres p , V , T , il vient

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{\frac{\partial F}{\partial T}}{\frac{\partial F}{\partial V}}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -\frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial T}}.$$

En multipliant membre à membre ces trois relations, on obtient finalement

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \times \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \times \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -1. \quad (1.11)$$

²Pour une présentation élémentaire de l'ellipse, voir le chapitre 2 du complément *Courbes et géométrie différentielle* sur le site touteslesmaths.fr.

1.3 Expression intrinsèque de la différentielle

En mécanique et en électrostatique, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) , ou par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) , ou par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) . Si $U = U(M) = U(x, y, z)$, on a

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz. \quad (1.12)$$

Cette expression est donnée en fonction des coordonnées cartésiennes x, y, z . On cherche une expression *intrinsèque*, c'est-à-dire valable dans n'importe quel système de coordonnées. Pour ce faire, on introduit le *vecteur gradient* au point M . On le définit à partir des coordonnées cartésiennes par

$$\vec{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.13)$$

Or le déplacement infinitésimal du point M s'écrit

$$\vec{dM} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}.$$

Ainsi la relation (1.13) peut s'interpréter comme un *produit scalaire* :

$$dU = \vec{\text{grad}}U \cdot \vec{dM}. \quad (1.14)$$

C'est l'*expression intrinsèque de la différentielle*. Elle est valable dans n'importe quel système de coordonnées.

Exemple 1.3 Trouvons l'expression du vecteur gradient au point M en coordonnées cylindriques, c'est-à-dire en fonction de r, θ, z , dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ des coordonnées cylindriques. On calcule d'abord les composantes de \vec{dM} dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$. Celles-ci s'obtiennent en faisant varier r de dr (θ et z fixés), θ de $d\theta$ (r et z fixés), z de dz (r et θ fixés), de manière indépendante. On voit (Figure 1.3) que

$$\vec{dM}_{\theta,z} = dr \vec{e}_r, \quad \vec{dM}_{r,z} = r d\theta \vec{e}_\theta, \quad \vec{dM}_{r,\theta} = dz \vec{k}.$$

En effet, pour la deuxième expression par exemple, le point M décrit un arc de cercle infinitésimal de rayon r et d'angle au centre $d\theta$ lorsque r et z sont fixés et θ varie de $d\theta$.

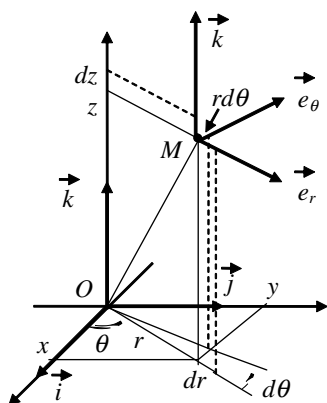


Figure 1.3

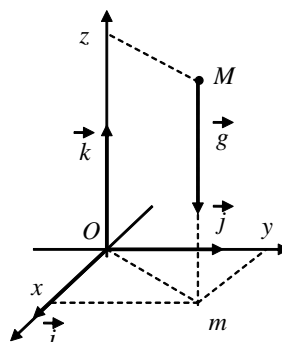


Figure 1.4

Puisque $\vec{dM} = \vec{dM}_{\theta,z} + \vec{dM}_{r,z} + \vec{dM}_{r,\theta}$, il vient

$$\vec{dM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{k}. \quad (1.15)$$

Posons $\vec{\text{grad}}U = a \vec{e}_r + b \vec{e}_\theta + c \vec{k}$, où a, b, c sont inconnus et traduisons l'expression intrinsèque (1.14) dans la base orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$:

$$dU = \vec{\text{grad}}U \cdot \vec{dM} = (a \vec{e}_r + b \vec{e}_\theta + c \vec{k}) \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{k}) = adr + brd\theta + cdz.$$

Puisqu'on a aussi $dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial z} dz$ et que les deux expressions de dU sont valables pour tout $dr, d\theta, dz$, on obtient par identification

$$\frac{\partial U}{\partial r} = a, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = br, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = c.$$

D'où l'expression du *gradient en coordonnées cylindriques* :

$$\vec{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}. \tag{1.16}$$

1.4 Champs de vecteurs

Soit \mathcal{A} une partie de l'espace. On dit qu'il existe un *champ de vecteurs* défini sur \mathcal{A} si en tout point M de \mathcal{A} existe un vecteur $\vec{E} = \vec{E}(M)$. Ainsi, en un point de l'espace peuvent exister deux sortes d'objets :

a) Des fonctions scalaires $U = U(M)$, par exemple en physique la température au point M , la pression au point M , etc.

b) Des champs de vecteurs $\vec{E} = \vec{E}(M)$. L'exemple de champ de vecteurs le plus simple est le champ de pesanteur $\vec{g} = \vec{g}(M) = -g\vec{k}$ au voisinage du sol, qui est un champ constant (Figure 1.4). De même, un ressort de raideur k crée au voisinage de sa position d'équilibre O un champ de forces dont l'expression est $\vec{F} = \vec{F}(M) = -kx\vec{i}$ (Figure 1.5).

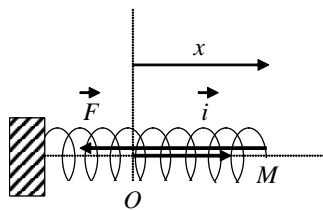


Figure 1.5

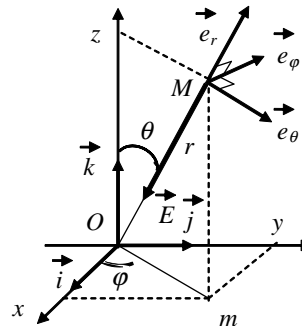


Figure 1.6

Enfin, un *champ newtonien* de paramètre k est défini en coordonnées sphériques (Figure 1.6) par

$$\vec{E} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r. \tag{1.17}$$

On rencontre des champs newtoniens en électrostatique, lorsqu'on place une charge électrique ponctuelle q en O . Dans ce cas $k = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$. On les rencontre aussi en mécanique, lorsqu'on place une masse ponctuelle m en O . Dans ce cas $k = -mC$, où C est la constante de la gravitation universelle.

1.5 Circulation d'un champ de vecteurs

Soit M un point de l'espace où existe un champ de vecteurs $\vec{E} = \vec{E}(M)$. Déplaçons le point M de \vec{dM} (Figure 1.7). Par définition, la *circulation infinitésimale* associée à ce déplacement est le produit scalaire

$$\delta W = \vec{E} \cdot \vec{dM}. \tag{1.18}$$

Si \vec{E} est une force \vec{F} , δW représente le *travail* infinitésimal de \vec{F} lors du déplacement infinitésimal \vec{dM} .

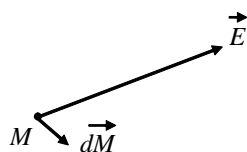


Figure 1.7

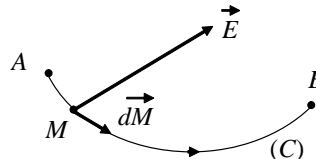


Figure 1.8

Supposons que le champ \vec{E} ait pour composantes P, Q, R dans la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Alors on a

$$\delta W = (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = Pdx + Qdy + Rdz. \quad (1.19)$$

L'expression $\delta W = Pdx + Qdy + Rdz$ s'appelle une *forme différentielle*. Une forme différentielle peut donc toujours s'interpréter comme la circulation infinitésimale d'un champ de vecteurs. On remarquera la notation δW , et non pas dW : en fait, la notation d est réservée à la *variation infinitésimale d'une fonction*. Lorsqu'on a affaire à une quantité infinitésimale et qu'on ne sait pas si celle-ci provient de la variation d'une fonction, on utilise la lettre δ (delta). Nous reviendrons sur ce point délicat dans la section suivante.

Imaginons maintenant que nous faisons circuler le champ \vec{E} le long d'une courbe orientée \vec{C} , par déplacements successifs $d\vec{M}$ le long de \vec{C} , dans le sens positif de circulation (Figure 1.8). La *circulation* du champ \vec{E} le long de la courbe orientée \vec{C} est définie, tout naturellement, comme la somme des circulations infinitésimales δW lorsque M se déplace de A à B en restant sur \vec{C} , c'est-à-dire

$$W(\vec{C}) = \int_{\vec{C}} \delta W = \int_{\vec{C}} \vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_{\vec{C}} Pdx + Qdy + Rdz \quad (1.20)$$

Une telle intégrale s'appelle une *intégrale curviligne*. Elle peut se calculer grâce à une représentation paramétrique³ de la courbe \vec{C} . En particulier, lorsque \vec{E} est une force \vec{F} , $W(\vec{C})$ représente le *travail* de \vec{F} lorsque le point M se déplace de A à B le long de la courbe \vec{C} .

Exemple 1.4 Calculer l'intégrale curviligne $I = \int_{\vec{C}} ydx + 3xdy$, où \vec{C} est le demi-cercle de centre O de rayon R , parcouru de A vers B (Figure 1.9).

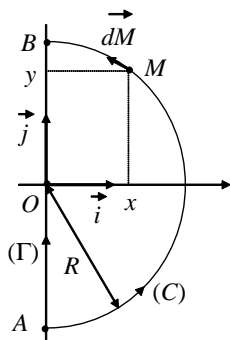


Figure 1.9

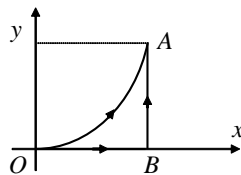


Figure 1.10

Cette intégrale curviligne représente la circulation du champ $\vec{E} = y\vec{i} + 3x\vec{j}$, qui est un champ du plan. Ici $dz = 0$ car tout se passe dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) . Un paramétrage de la courbe \vec{C} est $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, lorsque t varie de $-\frac{\pi}{2}$ (point A) à $\frac{\pi}{2}$ (point B). En différentiant, il vient $dx = -R \sin t dt$ et $dy = R \cos t dt$. En remplaçant x, dx, y, dy dans l'intégrale curviligne, on obtient

$$\begin{aligned} I &= W(\vec{C}) = \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} R \sin t \cdot (-R \sin t) dt + 3R \cos t \cdot R \cos t dt = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos^2 t - \sin^2 t) dt \\ &= R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} (1 + \cos 2t) - \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \right) dt = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2t) dt = R^2 [t + \sin 2t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2. \end{aligned}$$

Remarque 1.2 Supposons que, dans l'exemple précédent, on fasse circuler \vec{E} de nouveau de A vers B , mais cette fois le long du segment $\vec{\Gamma}$ sur l'axe des y . Pour cette circulation, le paramètre est y , qui varie de $-R$ à $+R$. En outre, on a $x = 0$, et $dx = 0$ puisque x est constant. Ainsi

$$W(\vec{\Gamma}) = \int_{-R}^R 0 dy = 0.$$

³Pour plus de précisions sur les représentations paramétriques des courbes, voir le chapitre 1 du supplément *Courbes et géométrie différentielle* sur le site touteslesmaths.fr.

On observe donc que $W(\vec{\Gamma}) \neq W(\vec{C})$. En général, la circulation d'un champ de vecteurs entre deux points A et B dépend du chemin suivi. Ceci nous conduit à la notion de différentielle exacte.

1.6 Différentielle exacte et potentiel scalaire

Définition 1.1 On dit que la forme différentielle $\delta W = Pdx + Qdy + Rdz$ est exacte s'il existe une fonction $U = U(x, y, z)$ telle que $\delta W = dU$.

Ceci peut se traduire en écrivant que

$$\delta W = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

En d'autres termes, $\delta W = Pdx + Qdy + Rdz$ est une différentielle exacte s'il existe une fonction $U = U(x, y, z)$ satisfaisant simultanément

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R. \quad (1.21)$$

Exemple 1.5 La forme différentielle $\delta W = y^2 z^3 dx + 2xyz^3 dy + 3xy^2 z^2 dz$ est-elle exacte ? Pour le savoir, on cherche à trouver U telle que $dU = \delta W$, c'est-à-dire telle que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y^2 z^3 \quad (1), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2xyz^3 \quad (2), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 3xy^2 z^2 \quad (3).$$

Intégrons (1) par rapport à x (y et z étant considérés comme des constantes). On obtient $U = y^2 z^3 x + \text{Constante}$. Mais cette constante peut dépendre de y et z , puisque y et z sont constants lorsqu'on prend la dérivée partielle par rapport à x . Ainsi

$$U = xy^2 z^3 + f(y, z) \quad (4).$$

On dérive alors (4) par rapport à y , pour obtenir $\frac{\partial U}{\partial y} = 2xyz^3 + \frac{\partial f}{\partial y}$. Reportons dans (2), il vient $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Puisque f est une fonction des deux variables y et z , cela signifie que f ne dépend pas de y : donc f ne dépend que de z . Ainsi $f(y, z) = g(z)$. En reportant dans (4), on obtient

$$U = xy^2 z^3 + g(z) \quad (5).$$

Enfin, dérivons (5) par rapport à z et reportons dans (3). Il vient $g'(z) = 0$, ce qui signifie que $g(z) = C = \text{Constante}$ (une vraie constante, cette fois, puisque g est une fonction de la seule variable Z). Ainsi $\delta W = dU$, avec

$$U = xy^2 z^3 + C.$$

Donc δW est une différentielle exacte.

Remarque 1.3 Soit $\delta W = Pdx + Qdy + Rdz$ une différentielle exacte. Alors $\delta W = dU$, où U est une fonction des trois variables x , y et z , c'est-à-dire du point M , et δW s'interprète comme la circulation infinitésimale du champ $\vec{E} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, c'est-à-dire que

$$\delta W = dU = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dM}.$$

L'équation (1.14) montre alors que $\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}U$. On dit que \vec{E} est un *champ de gradients*. On définit alors le *potentiel scalaire* V de \vec{E} par $V = -U$, c'est-à-dire

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V. \quad (1.22)$$

Le calcul de l'exemple 1.5 montre que le potentiel scalaire V , comme U , est défini à une constante près.

Lorsque (1.22) est vérifié, on dit aussi que le champ \vec{E} *dérive d'un potentiel scalaire*, ou qu'il est *conservatif*. La présence du signe $-$ résulte de l'interprétation physique du potentiel : le travail fourni par une force qui dérive d'un potentiel, ou *force conservative*, doit être positif lorsque V diminue (le potentiel, c'est du travail en devenir).

Exemple 1.6 Considérons le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{k}$ au voisinage du sol (Figure 1.4). Montrons qu'il dérive d'un potentiel. Pour cela, on cherche V tel que $\vec{g} = -\vec{\nabla}V$, c'est-à-dire

$$g\vec{k} = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}.$$

En identifiant les 2 premières composantes, il vient $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$, ce qui signifie que V ne dépend ni de x , ni de y . Donc $V = V(z)$. Par identification de la troisième composante, il vient

$$\frac{\partial V}{\partial z} = V'(z) = g,$$

d'où $V = gz + C$. On choisit la constante C de telle sorte que V soit nul pour $z = 0$ (le potentiel de pesanteur d'un objet à terre vaut 0). On voit finalement que le champ de pesanteur au voisinage du sol dérive du potentiel scalaire

$$V = gz.$$

On montre de même que le poids \vec{P} d'un point matériel de masse m dérive du potentiel scalaire $V = mgz$. Ainsi \vec{g} et \vec{P} sont *conservatifs*.

Exemple 1.7 Le champ newtonien

$$\vec{E} = \frac{k}{r^2}\vec{e}_r$$

dérive d'un potentiel scalaire. Pour le montrer, résolvons l'équation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$ grâce à l'expression du gradient en coordonnées sphériques (Exercice 1.7), qui s'écrit

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi. \quad (1.23)$$

Les composantes de \vec{E} suivant \vec{e}_θ et \vec{e}_φ étant nulles, on a $\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$, ce qui signifie que V ne dépend que de r , c'est-à-dire $V = V(r)$. Alors

$$\frac{\partial V}{\partial r} = V'(r) = -\frac{k}{r^2}.$$

Par conséquent $V = \frac{k}{r} + C$. On choisit la constante de telle sorte que V soit nul en l'infini, c'est-à-dire $\lim_{r \rightarrow +\infty} V = 0$. Ceci correspond à $C = 0$. Donc le champ newtonien $\vec{E} = \frac{k}{r^2}\vec{e}_r$ dérive du potentiel scalaire

$$V = \frac{k}{r}.$$

Revenons sur la remarque 1.2. On a vu que, en général, la circulation d'un champ entre A et B dépend du chemin suivi. Supposons que le champ dérive d'un potentiel scalaire V , ce qui revient à dire que δW est une différentielle exacte dU , avec $V = -U$. Alors la circulation de \vec{E} sur un arc \vec{C} joignant A et B vaut

$$W(\vec{C}) = \int_{\vec{C}} \delta W = - \int_{\vec{C}} dV.$$

Or cette intégrale représente la somme de tous les accroissements infinitésimaux de la fonction $V = V(M)$ entre A et B , c'est-à-dire la *variation totale* de V entre A et B , qui vaut $V(B) - V(A)$. On en déduit le résultat fondamental suivant :

Si E dérive d'un potentiel scalaire V , sa circulation entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B . Elle est égale à la différence de potentiel entre A et B

$$W(A \rightarrow B) = V(A) - V(B). \quad (1.24)$$

Un cas particulier remarquable est celui d'une courbe *fermée* \vec{C} . Dans ce cas, on part d'un point A de la courbe pour revenir en A .

La circulation du champ \vec{E} le long de la courbe fermée \vec{C} se note

$$W(\vec{C}) = \oint_{\vec{C}} \delta W = \oint_{\vec{C}} \vec{E} \cdot d\vec{M}. \quad (1.25)$$

Si le champ dérive d'un potentiel scalaire V , alors sa circulation le long de toute courbe fermée est nulle, puisqu'elle vaut $V(A) - V(A) = 0$.

Pour terminer, signalons l'importante propriété suivante :

Si $dU = Pdx + Qdy$ est une différentielle exacte, alors

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (1.26)$$

En effet, si dU est exacte, alors $P = \frac{\partial U}{\partial x}$ et $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$. Donc

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Ainsi (1.26) résulte du théorème de Schwarz⁴, qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

De même que, si $dU = Pdx + Qdy + Rdz$ est une différentielle exacte, alors

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}. \quad (1.27)$$

Exercices

Les basiques

Exercice 1.1 (A) Démontrer les formules donnant la différentielle d'une somme et d'un produit (Formules (1.6)).

Exercice 1.2 (A) Démontrer les formules (1.7) et (1.8).

Exercice 1.3 (A) Soit $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$.

Partant de $x = 1$, $y = 2$, on augmente x de 0,003 et y de $-0,001$.

- 1) En utilisant la différentielle, évaluer l'accroissement de f .
- 2) Calculer la valeur exacte de cet accroissement grâce à une calculatrice et comparer les résultats obtenus.

Exercice 1.4 (A,B) Trouver le coefficient directeur de la tangente au point de coordonnées (x, y) du *folium de Descartes*⁵, d'équation cartésienne $x^3 + y^3 = 3xy$.

Exercice 1.5 (C) Soit U définie en cartésiennes par $U = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$.

- 1) Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}U$ en coordonnées cartésiennes.
- 2) Calculer U et $\overrightarrow{\text{grad}}U$ en coordonnées sphériques.
- 3) Donner les expressions intrinsèques de $U = U(M)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}U = \overrightarrow{\text{grad}}U(M)$.

Exercice 1.6 (C) Démontrer la formule (1.23).

Exercice 1.7 (D,F) On considère le champ plan $\vec{E} = x^2y \vec{i} + xy \vec{j}$.

- 1) Calculer la circulation de \vec{E} le long de l'arc $\vec{\Gamma}$ de parabole $y = x^2$, entre O et le point $A(1, 1)$ (Figure 1.10).

⁴Exercice 33.21, page 445 de *Toutes les mathématiques*.

⁵Exercice 1.8 du complément *Courbes et géométrie différentielle* sur le site touteslesmaths.fr.

2) Calculer la circulation de E entre O et A , cette fois le long du chemin \vec{C} constitué des segments de droites OB et BA , où $B(1, 0)$.

3) Le champ \vec{E} dérive-t-il d'un potentiel scalaire ?

Exercice 1.8 (E,F) Dans l'espace, on considère le champ \vec{E} défini en coordonnées cartésiennes par $\vec{E} = (3x^2y + y^3)\vec{i} + (x^3 + 3xy^2)\vec{j} + 6z\vec{k}$.

1) Vérifier, en la calculant, qu'il existe une fonction U telle que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2y + y^3, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x^3 + 3xy^2, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 6z.$$

2) En déduire que \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire V . Calculer V de telle sorte que le potentiel soit nul à l'origine.

3) Calculer la circulation de E entre les points $A(1, 0, -1)$ et $B(2, -1, 3)$.

Exercice 1.9 (E) Dans l'espace, on considère la forme différentielle

$$\delta W = (3x^2 - 6xy - 6xz) dx + (3y^2 - 3x^2) dy + (3z^2 - 3x^2) dz.$$

Vérifier, en la calculant, qu'il existe une fonction U telle que $\delta W = dU$. En déduire que δW est une différentielle exacte.

Exercice 1.10 (E) Soit la forme différentielle

$$\delta W = \frac{x^2 - y}{x^2} dx + \frac{x + 1}{x} dy.$$

Vérifier, en la calculant, qu'il existe une fonction U telle que $\delta W = dU$. En déduire que δW est une différentielle exacte.

Exercice 1.11 (C) Soient $U_1 = U_1(M)$ et $U_2 = U_2(M)$ des fonctions de trois variables. Démontrer les formules suivantes :

$$1) \overrightarrow{\text{grad}}(U_1 + U_2) = \overrightarrow{\text{grad}}U_1 + \overrightarrow{\text{grad}}U_2, \quad 2) \overrightarrow{\text{grad}}(U_1 U_2) = U_1 \overrightarrow{\text{grad}}U_2 + U_2 \overrightarrow{\text{grad}}U_1.$$

Exercice 1.12 (F,G) Montrer que la force $\vec{F} = -kx\vec{i}$ est conservative en calculant le potentiel scalaire V duquel elle dérive.

Les techniques

Exercice 1.13 Les fonctions x et y de la variable t sont liées par les relations $xy = 1$ et $y^2 - x^2 = 2t$. Calculer en fonction de x et y :

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Exercice 1.14 Les variables p, v, T sont liées par une relation de la forme $f(p, v, T) = 0$. On suppose que

$$dU = CdT + (l - p) dv \quad \text{et} \quad dS = \frac{C}{T} dT + \frac{l}{T} dv$$

sont des différentielles exactes.

1) Quelles variables indépendantes a-t-on choisi ?

2) Prouver que $l = T \frac{\partial p}{\partial T}$.

Exercice 1.15 On considère la forme différentielle

$$\delta W = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

1) Dans quel domaine cette forme différentielle est-elle définie ?

2) Calculer l'intégrale curviligne $I = \oint_{\vec{C}} \delta W$, où \vec{C} est le cercle de centre O de rayon 1, parcouru dans le sens trigonométrique.

3) δW dérive-t-elle d'un potentiel scalaire dans le plan privé de l'origine O ?

4) La réciproque de (1.26) est-elle toujours vraie ?

Chapitre 2

Intégrales doubles

Les intégrales doubles sont la généralisation naturelle des intégrales simples (de fonctions d'une variable sur un intervalle) aux fonctions de deux variables sur un domaine D du plan.

Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :

- A. Savoir calculer une intégrale double en coordonnées cartésiennes.
- B. Connaître l'expression de l'élément de surface dS en coordonnées polaires, et savoir calculer une intégrale double en coordonnées polaires.
- C. Savoir utiliser la formule de Green-Riemann pour transformer une intégrale double en intégrale curviligne.

2.1 Notion d'intégrale double

Soit $U = f(M) = f(x, y)$ une fonction de deux variables, définie dans un domaine D . Lorsqu'on fait varier le point $M(x, y)$ dans D , et qu'on reporte en hauteur $U = f(M)$, on obtient la représentation graphique de f , qui est une *surface* Σ de l'espace (Figure 2.1).

Entourons maintenant le point M par une surface infinitésimale dS . Alors $f(M) dS$ représente le volume du *cylindre infinitésimal* dessiné figure 2.1 : ce cylindre a pour base dS et pour hauteur $U = f(M)$. Ce volume est compté *algébriquement*, c'est-à-dire positif si M est situé au-dessus du plan Oxy , négatif dans le cas contraire. Lorsqu'on fait la somme de tous les $f(M) dS$ pour tous les points M de D , on obtient une *intégrale double*, qu'on note

$$I = \iint_D f(M) dS. \quad (2.1)$$

Cette intégrale double représente, mathématiquement, le *volume algébrique* compris entre le plan Oxy et la surface Σ représentative de f . La notation utilisée (un double signe d'intégration), renvoie à la fois au fait que le domaine d'intégration D est à deux dimensions, et que le procédé de calcul, comme nous le verrons, utilise deux intégrations successives.

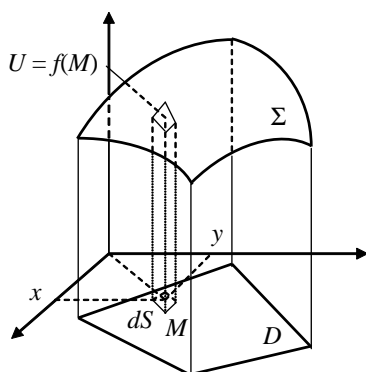


Figure 2.1

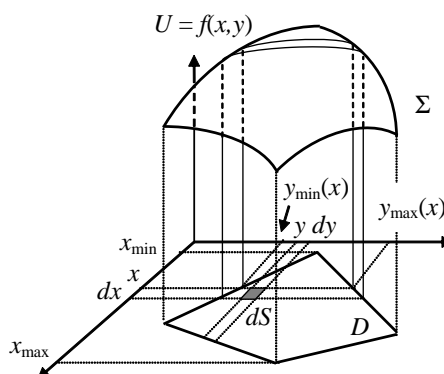


Figure 2.2

2.2 Calcul en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, l'élément de surface dS s'obtient en faisant varier x de dx et y de dy (Figure 24.2). Alors dS est un rectangle de côtés dx et dy , donc

$$dS = dx dy. \quad (2.2)$$

L'intégrale double I s'écrit alors

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (2.3)$$

Expliquons comment elle se calcule à l'aide de l'interprétation géométrique (Figure 24.2). Pour une valeur donnée de x comprise entre x_{\min} et x_{\max} (la plus petite valeur de x dans D , et la plus grande), faisons varier x de dx . On définit ainsi une *tranche infinitésimale*, parallèle au plan OyU , d'épaisseur dx . Soit S_x la surface de cette tranche. Le volume de la tranche est infinitésimal, et vaut $dV_x = S_x dx$. Le volume sous la surface Σ , c'est-à-dire l'intégrale double I , est la somme de tous ces volumes infinitésimaux. Par conséquent

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} dV_x = \int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} S_x dx. \quad (2.4)$$

Il reste à trouver S_x . Si nous regardons la figure 2.2 suivant l'axe des x (Figure 2.3), nous voyons que S_x est tout simplement la surface sous la courbe $U = f(x, y)$ pour x fixé, entre les droites verticales $y = y_{\min}(x)$ et $y = y_{\max}(x)$. Ces deux valeurs correspondent à l'entrée et la sortie dans le domaine D pour x fixé (Figures 2.3 et 2.4).

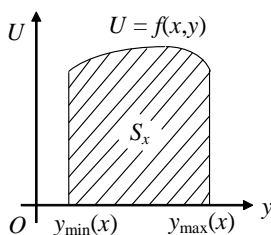


Figure 2.3
(vue dans l'axe Ox)

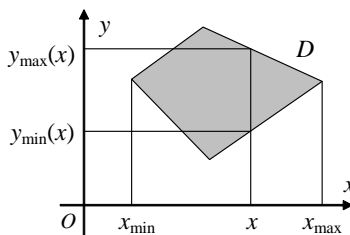


Figure 2.4
(vue de dessus)

On a donc $S_x = \int_{y=y_{\min}(x)}^{y=y_{\max}(x)} f(x, y) dy$. En reportant dans (2.4), on obtient la formule fondamentale permettant le calcul des intégrales doubles :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} \left(\int_{y=y_{\min}(x)}^{y=y_{\max}(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (2.5)$$

En intervertissant les rôles de x et y , on voit que l'on a aussi

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{y=y_{\min}}^{y=y_{\max}} \left(\int_{x=x_{\min}(y)}^{x=x_{\max}(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad (2.6)$$

Exemple 2.1 Calculer l'intégrale double $I = \iint_D xy dx dy$, où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y \leq 2 ; x + y \geq 1 ; x \geq 0\}.$$

On représentera systématiquement le domaine d'intégration D suivant le modèle de la figure 2.4. Les points de D sont ici définis par 3 conditions :

- $x \geq 0$ signifie que les points de D sont à droite de l'axe Oy car leur abscisse est positive.
- $2x + y \leq 2 \Leftrightarrow y \leq -2x + 2$: les points $M(x, y)$ vérifiant cette inégalité sont les points situés *sous* la droite (D_1) d'équation $y = -2x + 2$. En effet, l'ordonnée y des points de la droite vérifie $y = -2x + 2$. Si $y \leq -2x + 2$, l'ordonnée est *plus petite*, donc on est *au-dessous* de la droite.
- $x + y \geq 1 \Leftrightarrow y \geq -x + 1$: les points $M(x, y)$ de D sont donc situés *au-dessus* de la droite (D_2) d'équation $y = -x + 1$.

Par conséquent le domaine D est le triangle représenté figure 2.5.

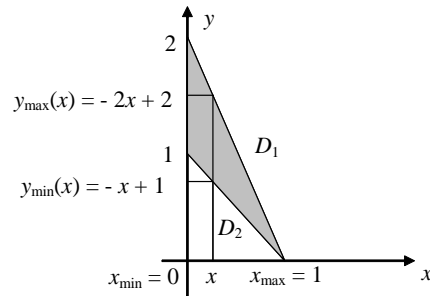


Figure 2.5

Dès lors que le domaine d'intégration est représenté, on calcule I en utilisant la formule (2.5). On a d'abord $x_{\min} = 0$ et $x_{\max} = 1$. Par ailleurs, pour x fixé entre x_{\min} et x_{\max} (voir Figure 2.5), on voit que $y_{\min}(x) = -x + 1$ et $y_{\max}(x) = -2x + 2$. Donc

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=-x+1}^{y=-2x+2} xy dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=-x+1}^{y=-2x+2} dx.$$

On notera que x s'est *mis en facteur* dans l'intégrale intérieure, puisque c'est une constante lorsqu'on intègre par rapport à y . Il vient maintenant, puisque $(-2x + 2)^2 = 4(-x + 1)^2$,

$$I = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} x \left((-2x + 2)^2 - (-x + 1)^2 \right) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x (-x + 1)^2 dx.$$

En développant $(-x + 1)^2$, on obtient finalement

$$I = \frac{3}{2} \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

2.3 Calcul en coordonnées polaires

On obtient l'élément de surface dS en polaires en faisant varier r de dr et θ de $d\theta$ (Figure 2.6). Alors dS est un rectangle infinitésimal de longueur dr , de largeur $r d\theta$ (arc de cercle de rayon r , d'angle au centre $d\theta$). Donc

$$dS = r dr d\theta. \tag{2.7}$$

L'intégrale double I s'écrit alors

$$I = \iint_D f(M) dS = \iint_D f(r, \theta) r dr d\theta.$$

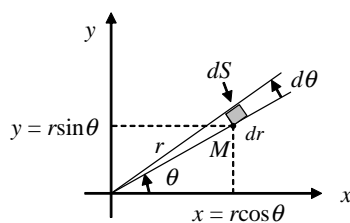


Figure 2.6

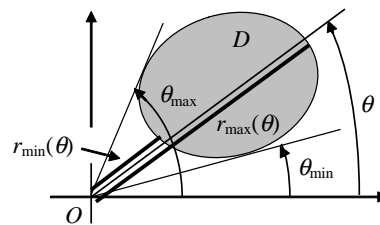


Figure 2.7

Dans la pratique, on représentera le domaine D , puis on calculera I par deux intégrations successives, comme dans la formule (2.5) :

$$\iint_D g(r, \theta) r dr d\theta = \int_{\theta=\theta_{\min}}^{\theta=\theta_{\max}} \left(\int_{r=r_{\min}(\theta)}^{r=r_{\max}(\theta)} r g(r, \theta) dr \right) d\theta. \tag{2.8}$$

Ici on *balaye* le domaine D en faisant varier θ de θ_{\min} à θ_{\max} (Figure 2.7). Pour une valeur fixée de θ , la plus petite valeur de r (où on pénètre dans D) est $r_{\min}(\theta)$ et la plus grande valeur de r (où on sort de D) est $r_{\max}(\theta)$.

Exemple 2.2 Calculer en passant en coordonnées polaires

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 0; y \geq 0\}.$$

Dans l'intégrale I , donnée en coordonnées cartésiennes, $dS = dx dy$ représente l'élément de surface dS . On le remplace par $dS = r dr d\theta$, et on remplace x et y par $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. On obtient

$$I = \iint_D \frac{r dr d\theta}{r^2} = \iint_D \frac{dr d\theta}{r}.$$

Par ailleurs, l'inégalité $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ s'écrit $1 \leq r \leq 2$ car $r^2 = x^2 + y^2$. Le domaine D est donc une portion de *couronne circulaire* (Figure 2.8).

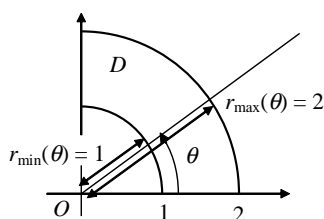


Figure 2.8

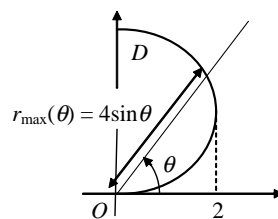


Figure 2.9

On voit que $\theta_{\min} = 0$, $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$. En outre, pour une valeur fixée de θ , $r_{\min}(\theta) = 1$ et $r_{\max}(\theta) = 2$. Par conséquent

$$I = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=r_{\min}(\theta)}^{r=r_{\max}(\theta)} \frac{dr}{r} \right) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=1}^{r=2} \frac{dr}{r} \right) d\theta.$$

Or l'intégrale centrale $\int_{r=1}^{r=2} \frac{dr}{r}$ ne dépend pas de θ . Elle se met donc en facteur dans l'intégrale par rapport à θ et I s'exprime ici comme le produit de deux intégrales simples :

$$I = \int_{r=1}^{r=2} \frac{dr}{r} \times \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Remarque 2.1 L'utilisation des coordonnées polaires dans un calcul d'intégrale double est recommandée lorsque le domaine d'intégration D est un secteur de cercle ou de couronne circulaire de centre O . Dans ce cas, en effet, les bornes $r_{\min}(\theta)$ et $r_{\max}(\theta)$ ne dépendent pas de θ .

Exemple 2.3 Calculer en passant en coordonnées polaires

$$I = \iint_D x dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 4y \leq 0; x \geq 0\}.$$

L'intégrale double s'écrit $I = \iint_D r \cos \theta \cdot r dr d\theta = \iint_D r^2 \cos \theta dr d\theta$.

L'inégalité $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$ représente l'intérieur du cercle (C) d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4y = 0$. Il s'agit du cercle de centre $\Omega(0, 2)$ de rayon $R = 2$. Ce cercle passe par O . Son équation polaire est $r^2 - 4r \sin \theta = 0$, c'est-à-dire $r = 4 \sin \theta$ (voir Section 7.3 de *Toutes les mathématiques*). Puisque $x \geq 0$, D est un *demi-disque* (Figure 2.9).

La figure 2.9 montre que $\theta_{\min} = 0$ et $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$. En outre, pour une valeur fixée de θ , on a $r_{\min}(\theta) = 0$ et $r_{\max}(\theta) = 4 \sin \theta$ car l'équation polaire de (C) est $r = 4 \sin \theta$. Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=r_{\min}(\theta)}^{r=r_{\max}(\theta)} r^2 \cos \theta dr \right) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos \theta \left(\int_{r=0}^{r=4 \sin \theta} r^2 dr \right) d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos \theta \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_{r=0}^{r=4 \sin \theta} d\theta = \frac{64}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin^3 \theta d\theta = \frac{16}{3} [\sin^4 \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

2.4 Intégrale double sur un pavé

Soit $I = \iint_D f(u, v) \, dudv$ une intégrale double. On dit que le domaine d'intégration D est un *pavé* si les bornes $v_{\min}(u)$ et $v_{\max}(u)$ sont indépendantes de u . Dans ce cas, (2.5) s'écrit

$$\iint_D f(u, v) \, dudv = \int_{u=u_{\min}}^{u=u_{\max}} \left(\int_{v=v_{\min}}^{v=v_{\max}} f(u, v) \, dv \right) du.$$

Lorsque les variables d'intégration sont les coordonnées cartésiennes, un pavé est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes (Figure 2.10). Lorsque les variables d'intégration sont les coordonnées polaires, un pavé est un secteur de cercle ou de couronne circulaire (Figure 2.11).

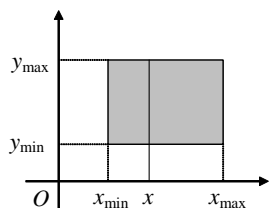


Figure 2.10
(pavé en cartésiennes)

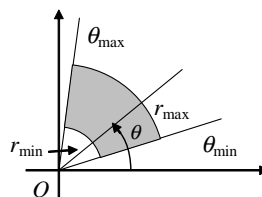


Figure 2.11
(pavé en polaires)

Dans les applications on rencontre souvent l'intégrale double sur un pavé D d'un produit $f(u, v) = g(u)h(v)$. Dans ce cas

$$\iint_D g(u)h(v) \, dudv = \int_{u=u_{\min}}^{u=u_{\max}} g(u) \left(\int_{v=v_{\min}}^{v=v_{\max}} h(v) \, dv \right) du.$$

Or $\int_{v=v_{\min}}^{v=v_{\max}} h(v) \, dv$ est l'intégrale d'une fonction de v , entre deux bornes indépendantes de u . C'est donc une *constante* et elle vient en facteur, d'où

$$\iint_D g(u)h(v) \, dudv = \int_{v=v_{\min}}^{v=v_{\max}} h(v) \, dv \times \int_{u=u_{\min}}^{u=u_{\max}} g(u) \, du$$

Ainsi, l'intégrale double sur un pavé du produit d'une fonction de u et d'une fonction de v s'écrit comme le produit de deux intégrales simples. C'est le cas, notamment, dans l'exemple 2.2.

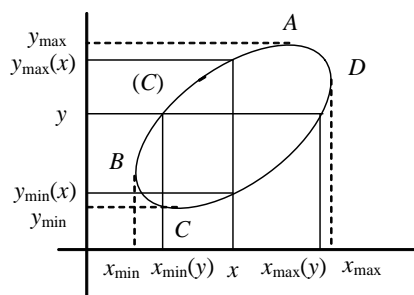


Figure 2.12

2.5 Formule de Green-Riemann

Soit (C) une courbe fermée orientée sans point double (Figure 2.12), parcourue dans le sens trigonométrique. Soient $P = P(x, y)$ et $Q = Q(x, y)$ des fonctions de deux variables, définies et admettant des dérivées partielles sur (C) et en tout point de l'intérieur D de (C) . La *formule de Green-Riemann* s'écrit :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{(C)} P dx + Q dy. \quad (2.9)$$

Elle permet de transformer une intégrale double en intégrale curviligne.

Démonstration En séparant l'intégrale double en deux, on a

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \\ &= \int_{y=y_{\min}}^{y=y_{\max}} \left(\int_{x=x_{\min}(y)}^{x=x_{\max}(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy - \int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} \left(\int_{y=y_{\min}(x)}^{y=y_{\max}(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_{y=y_{\min}}^{y=y_{\max}} [Q(x, y)]_{x=x_{\min}(y)}^{x=x_{\max}(y)} dy - \int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} [P(x, y)]_{y=y_{\min}(x)}^{y=y_{\max}(x)} dx. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{y=y_{\min}}^{y=y_{\max}} Q(x_{\max}(y), y) dy - \int_{y=y_{\min}}^{y=y_{\max}} Q(x_{\min}(y), y) dy \\ &\quad - \int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} P(x, y_{\max}(x)) dx + \int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} P(x, y_{\min}(x)) dx. \end{aligned}$$

Interprétons les quatre intégrales qui apparaissent comme des intégrales curvilignes grâce à la figure 2.12. On observe que :

a) $\int_{y=y_{\min}}^{y=y_{\max}} Q(x_{\max}(y), y) dy = \int_{\overleftarrow{CA}_{(d)}} Q(x, y) dy$, l'arc $\overleftarrow{CA}_{(d)}$ étant parcouru sur la partie située à droite de (C) . Cette circulation correspond donc au sens trigonométrique sur (C) .

b) $\int_{y=y_{\min}}^{y=y_{\max}} Q(x_{\min}(y), y) dy = \int_{\overleftarrow{CA}_{(g)}} Q(x, y) dy$, l'arc $\overleftarrow{CA}_{(g)}$ étant parcouru sur la partie située à gauche de (C) . On en déduit que $\int_{y=y_{\min}}^{y=y_{\max}} Q(x_{\min}(y), y) dy = - \int_{\overleftarrow{AC}_{(g)}} Q(x, y) dy$, l'arc $\overleftarrow{AC}_{(g)}$ étant parcouru sur la partie située à gauche de (C) , avec un sens de circulation qui correspond au sens trigonométrique sur (C) .

c) $\int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} P(x, y_{\max}(x)) dx = \int_{\overleftarrow{BD}_{(h)}} P(x, y) dx$, l'arc $\overleftarrow{BD}_{(h)}$ étant parcouru sur la partie située en haut de (C) . Par conséquent $\int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} P(x, y_{\max}(x)) dx = - \int_{\overleftarrow{DB}_{(h)}} P(x, y) dx$, l'arc $\overleftarrow{DB}_{(h)}$ étant parcouru sur la partie située en haut de (C) , avec un sens de circulation qui correspond au sens trigonométrique sur (C) .

d) $\int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} P(x, y_{\min}(x)) dx = \int_{\overleftarrow{BD}_{(b)}} P(x, y) dx$, l'arc $\overleftarrow{BD}_{(b)}$ étant parcouru sur la partie située en bas de (C) , donc dans le sens qui correspond au sens trigonométrique sur (C) .

On obtient donc finalement

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\overleftarrow{CA}_{(d)}} Q(x, y) dy + \int_{\overleftarrow{AC}_{(g)}} Q(x, y) dy \\ &\quad + \int_{\overleftarrow{DB}_{(h)}} P(x, y) dx + \int_{\overleftarrow{BD}_{(b)}} P(x, y) dx \\ &= \oint_{\overleftarrow{(C)}} Q(x, y) dy + \oint_{\overleftarrow{(C)}} P(x, y) dx = \oint_{\overleftarrow{(C)}} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

Exemple 2.4 Utiliser la formule de Green-Riemann pour calculer :

$$I = \iint_D y^2 dx dy, \text{ où } D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Ici D est l'intérieur de l'ellipse¹ (C) d'équation cartésienne $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ et d'équation paramétrique $x = 2 \cos t$; $y = \sin t$. L'ellipse est parcourue dans le sens trigonométrique lorsque t varie de 0 à 2π .

¹Pour une présentation élémentaire de l'ellipse, voir le chapitre 2 du complément *Courbes et géométrie différentielle* sur le site touteslesmaths.fr.

Pour appliquer la formule de Green-Riemann au calcul de I , choisissons $P = 0$, et $Q = xy^2$, de telle sorte que $\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$. Il vient alors

$$\iint_D y^2 dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{(\bar{C})} P dx + Q dy = \oint_{(\bar{C})} xy^2 dy.$$

Or $dy = \cos t dt$, donc $I = \int_0^{2\pi} 2 \cos t \sin^2 t \cos t dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt$.

Puisque $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, on obtient finalement

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \frac{1}{4} \left[t - \frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque 2.2 Si on prend, dans la formule de Green-Riemann, $Q = 0$ et $P = -y$, celle-ci s'écrit

$$\iint_D dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = - \oint_{(\bar{C})} y dx.$$

Or $\iint_D dx dy = \iint_D dS = S$, surface intérieure à (C) . On voit donc que la surface intérieure à la courbe fermée (C) est donnée par la formule

$$S = - \oint_{(\bar{C})} y dx. \quad (2.10)$$

De même, en prenant $Q = x$ et $P = 0$, on obtient

$$S = \oint_{(\bar{C})} x dy. \quad (2.11)$$

Exercices

Les basiques

Exercice 2.1 (A) Représenter le domaine \mathcal{D} du plan défini par

$$\mathcal{D} = \{(x, y) / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\},$$

puis calculer l'intégrale double $I = \iint_{\mathcal{D}} x^2 y dx dy$.

Exercice 2.2 (A) Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) / x \geq 1, y \geq 1, x + y \leq 4\}$. Calculer

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(x + y)^2}.$$

Exercice 2.3 (A) Calculer $I = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x} dx dy$, avec

$$\mathcal{D} = \{(x, y) / x \geq 0, y \geq 0, x^2 \leq y \leq x\}.$$

Exercice 2.4 (B) Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Calculer en passant en coordonnées polaires

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2}.$$

Exercice 2.5 (B) Soit R un paramètre réel strictement positif et soit

$$\mathcal{D} = \{(x, y) / 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Calculer en passant en coordonnées polaires $I = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2) dx dy$.

Exercice 2.6 (A,B) 1) Construire (\mathcal{C}) d'équation $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

2) Déterminer l'équation polaire de (\mathcal{C}) .

3) On note $\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } y \geq 0 \right\}$.

Calculer $I = \iint_{\mathcal{D}} y dx dy$ en utilisant les coordonnées cartésiennes.

4) Calculer I en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 2.7 (B) Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) / x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$.

Calculer $J = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) dx dy$ en passant en coordonnées polaires.

Exercice 2.8 (C) Calculer l'intégrale I de l'exercice 2.6 en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 2.9 (C) Soient a et b deux réels tels que $0 < b < a$, et

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Calculer l'intégrale double

$$J = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$$

en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 2.10 (A,C) Soit a un paramètre réel strictement positif et soit

$$\mathcal{D} = \{(x, y) / 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}.$$

Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} dx dy.$$

1) En utilisant les coordonnées cartésiennes.

2) En utilisant la formule de Green-Riemann.

Les techniques

Exercice 2.11 Soit R un paramètre réel strictement positif. Soit \mathcal{D} l'intérieur du cercle de centre O de rayon R , situé dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) (Figure 2.13).

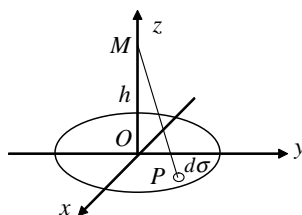


Figure 2.13

Soit $M(0, 0, h)$ un point donné sur l'axe des z . Soit P un point quelconque décrivant \mathcal{D} , et soit $d\sigma$ une surface infinitésimale entourant le point P . Calculer l'intégrale double

$$E = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\overrightarrow{PM} \cdot \vec{k}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} d\sigma.$$

Exercice 2.12 On se propose de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

1) Montrer que, pour tout réel x positif,

$$\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{xy}{1+xy} dy.$$

2) En déduire que, pour un domaine D du plan à préciser,

$$J = \iint_D \frac{x dx dy}{(1+x^2)(1+xy)}.$$

3) Expliquer pourquoi on a aussi

$$J = \iint_D \frac{y dx dy}{(1+y^2)(1+xy)}.$$

En déduire que

$$2J = \iint_D \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy.$$

4) Déterminer la valeur de J .

Chapitre 3

Intégrales triples

En généralisant les intégrales simples (sur un intervalle) et les intégrales doubles (sur un domaine du plan), on obtient les intégrales triples (sur un volume de l'espace). Dans ce chapitre, nous définissons les intégrales triples (Section 3.1) et montrons comment les calculer en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques (Sections 3.2, 3.3 et 3.4). Enfin, dans la section 3.5, nous montrons comment la notion de barycentre¹ permet de définir le *centre d'inertie* d'un solide grâce à des intégrales simples, doubles ou triples et donnons des exemples de calculs de centres d'inertie. Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :

- A. Savoir calculer une intégrale triple en coordonnées cartésiennes.
- B. Connaître l'expression de l'élément de volume dV en coordonnées cylindriques et savoir calculer une intégrale triple en coordonnées cylindriques.
- C. Connaître l'expression de l'élément de volume dV en coordonnées sphériques et savoir calculer une intégrale triple en coordonnées sphériques.
- D. Savoir trouver le centre d'inertie de solides simples.
- E. Savoir utiliser les théorèmes de Pappus-Guldin.

3.1 Notion d'intégrale triple

Soit $U = f(M) = f(x, y, z)$ une fonction de trois variables, définie dans un volume Σ de l'espace. Soit dV un volume infinitésimal entourant le point M . Lorsqu'on fait la somme de toutes les quantités infinitésimales $f(M) dV$ pour tous les points M de Σ , on obtient une *intégrale triple*,

$$I = \iiint_{\Sigma} f(M) dV. \quad (3.1)$$

Par analogie avec les intégrales doubles, le triple signe d'intégration renvoie à la fois au fait que le domaine d'intégration Σ est à trois dimensions, et que le procédé de calcul utilise trois intégrations successives.

Exemple 3.1 En mécanique, on définit le *moment d'inertie* J_{Δ} d'un point matériel M de masse m , en rotation autour d'un axe Δ , par

$$J_{\Delta} = m \left\| \overrightarrow{MH} \right\|^2, \quad (3.2)$$

H étant la projection orthogonale de M sur Δ (Figure 3.1).

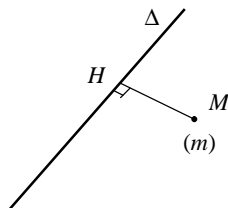


Figure 3.1

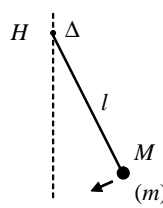


Figure 3.2

¹Voir la section 6.5 de *Toutes les mathématiques* (page 59).

Un exemple élémentaire est celui du *pendule simple* : une tige de longueur l , de masse négligeable, à l'extrémité de laquelle est fixée une masse m de petite taille (Figure 3.2). Le pendule oscille autour de l'axe horizontal Δ . Par définition, son moment d'inertie par rapport à Δ est $J_\Delta = ml^2$.

Considérons maintenant un solide mobile autour d'un axe Δ , et pas seulement un point matériel. Nous envisagerons trois cas :

a) Le solide considéré est un fil homogène F (Figure 3.3). Le fait qu'il soit homogène se traduit par l'existence d'une masse linéique (masse par unité de longueur) constante μ . Nous entourons un point M d'une longueur infinitésimale de fil dl . Ce petit morceau de fil a une masse infinitésimale $dm = \mu dl$.

La contribution infinitésimale dJ_Δ du point M au moment d'inertie J_Δ vaut, en accord avec (3.2),

$$dJ_\Delta = \|\vec{MH}\|^2 dm.$$

On définit alors le moment d'inertie total du fil comme la *somme des moments d'inertie de chacun de ses points*, c'est-à-dire

$$J_\Delta = \int_F dJ_\Delta = \mu \int_F \|\vec{MH}\|^2 dl.$$

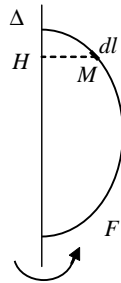


Figure 3.3

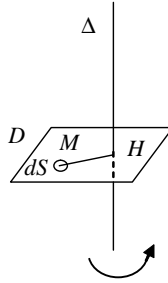


Figure 3.4

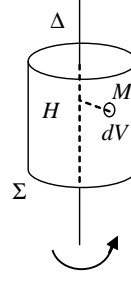


Figure 3.5

b) Le solide considéré est une plaque homogène D (Figure 3.4). La plaque a alors une masse surfacique (masse par unité de surface) constante μ . Nous entourons un point M d'une surface infinitésimale dS . Ce petit morceau de plaque a une masse infinitésimale $dm = \mu dS$. La contribution infinitésimale dJ_Δ du point M au moment d'inertie J_Δ vaut alors

$$dJ_\Delta = \|\vec{MH}\|^2 dm,$$

et le moment d'inertie total de la plaque est défini par

$$J_\Delta = \iint_D dJ_\Delta = \mu \iint_D \|\vec{MH}\|^2 dS. \quad (3.3)$$

c) Enfin, si le solide considéré est un volume homogène Σ (Figure 3.5), il possède une masse volumique (masse par unité de volume) constante μ . Nous entourons alors le point M d'un volume infinitésimal dV . Ce petit morceau de solide a une masse infinitésimale $dm = \mu dV$.

La contribution infinitésimale dJ_Δ du point M au moment d'inertie J_Δ vaut dans ce cas

$$dJ_\Delta = \|\vec{MH}\|^2 dm = \mu \|\vec{MH}\|^2 dV,$$

et le moment d'inertie total du solide est défini par

$$J_\Delta = \iiint_\Sigma dJ_\Delta = \mu \iiint_\Sigma \|\vec{MH}\|^2 dV. \quad (3.4)$$

On voit sur cet exemple que les intégrales simples, doubles et triples correspondent toutes les trois au même phénomène de *sommation*, mais sur des objets à une, deux ou trois dimensions. Les exercices 3.7 à 3.12 proposent quelques calculs élémentaires de moments d'inertie dans ces trois cas.

3.2 Calcul en coordonnées cartésiennes

Par analogie avec les intégrales doubles, en coordonnées cartésiennes l'élément de volume dV s'obtient en faisant varier x de dx , y de dy et z de dz . Alors dV est un parallélépipède rectangle de côtés dx , dy et dz , donc

$$dV = dx dy dz. \quad (3.5)$$

L'intégrale triple I s'écrit alors

$$I = \iiint_{\Sigma} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Expliquons comment elle se calcule, toujours par analogie avec les intégrales doubles. On représente d'abord le domaine d'intégration Σ (voir la figure 3.6, qui correspond à l'exemple 3.2 ci-après). Pour une valeur donnée de x comprise entre x_{\min} et x_{\max} (la plus petite valeur de x dans Σ et la plus grande), le plan vertical d'abscisse x , parallèle au plan Oyz , découpe dans Σ une surface Σ_x . Cette surface Σ_x peut se représenter dans le plan Oyz (Figure 3.7). Alors la formule fondamentale (2.5) du calcul des intégrales doubles se généralise sous la forme

$$I = \iiint_{\Sigma} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} \left(\iint_{\Sigma_x} f(x, y, z) dy dz \right) dx. \quad (3.6)$$

On peut évidemment intervertir les rôles de x , y et z .

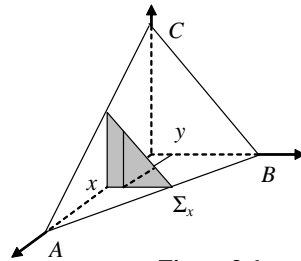


Figure 3.6

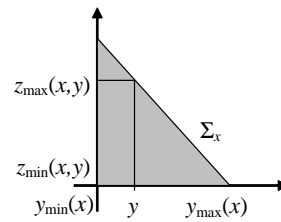


Figure 3.7

On voit donc que I se ramène à trois intégrations successives :

$$I = \int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} \left(\int_{y=y_{\min}(x)}^{y=y_{\max}(x)} \left(\int_{z=z_{\min}(x,y)}^{z=z_{\max}(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx. \quad (3.7)$$

Exemple 3.2 Calculer l'intégrale triple $I = \iiint_{\Sigma} (2-x) y dx dy dz$, où

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 2\}.$$

Le domaine d'intégration Σ est défini par 4 conditions. Les trois premières inégalités signifient que Σ est limité par les plans Oxy , Oyz , Oxz . La quatrième signifie que les points M de Σ sont situés au-dessous du plan d'équation $x + y + z = 2$, qui se représente en construisant ses points d'intersection avec les axes Ox , Oy , Oz (voir Exemple 9.2, page 93 de *Toutes les mathématiques*). Ces points sont $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ et $C(0, 0, 2)$. Ainsi Σ est l'intérieur du tétraèdre représenté dans la figure 3.6 (un tétraèdre est un solide de l'espace limité par 4 faces planes). Il est clair ici que $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = 2$. Donc

$$I = \int_{x=0}^{x=2} \left(\iint_{\Sigma_x} (2-x) y dy dz \right) dx = \int_{x=0}^{x=2} (2-x) \left(\iint_{\Sigma_x} y dy dz \right) dx.$$

On se ramène donc maintenant à calculer une intégrale double, la seule complication étant que le domaine Σ_x dépend de x (Figure 3.7). Pour x fixé, on a $y_{\min}(x) = 0$. Pour déterminer $y_{\max}(x)$, observons que la droite oblique de la figure 3.7 représente l'intersection du plan d'équation $x + y + z = 2$ avec le plan vertical d'abscisse x . Donc tous les points de cette droite vérifient l'équation $x + y + z = 2$. La valeur de $y_{\max}(x)$ correspond à $z = 0$ dans cette équation, donc $y_{\max}(x) = 2 - x$. Ensuite, pour y fixé dans Σ_x ,

on a $z_{\min}(x, y) = 0$ et $z_{\max}(x, y) = 2 - x - y$ puisque le point de coordonnées (y, z_{\max}) vérifie l'équation $x + y + z = 2$ (Figure 3.7). Il vient donc

$$I = \int_{x=0}^{x=2} (2-x) \left(\int_{y=0}^{y=2-x} \left(\int_{z=0}^{z=2-x-y} y dz \right) dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=2} (2-x) \left(\int_{y=0}^{y=2-x} y \left(\int_{z=0}^{z=2-x-y} dz \right) dy \right) dx,$$

car y se met en facteur dans l'intégrale par rapport à z . Par conséquent

$$I = \int_{x=0}^{x=2} (2-x) \left(\int_{y=0}^{y=2-x} y(2-x-y) dy \right) dx.$$

Pour calculer l'intégrale en y , on distribue le y sur la parenthèse. On prendra garde, cependant, à ne pas dissocier $2-x$, qui est une constante quand on intègre par rapport à y . Il vient

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{x=2} (2-x) \left(\int_{y=0}^{y=2-x} [(2-x)y - y^2] dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=2} (2-x) \left[\frac{1}{2}(2-x)y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=0}^{y=2-x} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{x=0}^{x=2} (2-x)^4 dx = \frac{1}{6} \left[-\frac{1}{5}(2-x)^5 \right]_0^2 = \frac{2^5}{30} = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

3.3 Calcul en coordonnées cylindriques

On obtient l'élément de volume en coordonnées cylindriques en faisant varier r de dr , θ de $d\theta$ et z de dz (Figure 3.8). Alors dV est un parallélépipède rectangle infinitésimal de longueur dr , de largeur $rd\theta$ (arc de cercle de rayon r , d'angle au centre $d\theta$), de hauteur dz . Donc

$$dV = r dr d\theta dz.$$

Comme en coordonnées polaires, on balayera le domaine Σ grâce à l'angle θ (ce qui correspond ici à une rotation autour de l'axe Oz), et l'intégrale triple $I = \iiint_{\Sigma} f(M) dV$ s'écrit

$$I = \iiint_{\Sigma} f(r, \theta, z) r dr d\theta dz = \int_{\theta=\theta_{\min}}^{\theta=\theta_{\max}} \left(\iint_{\Sigma_{\theta}} f(r, \theta, z) r dr dz \right) d\theta. \tag{3.8}$$

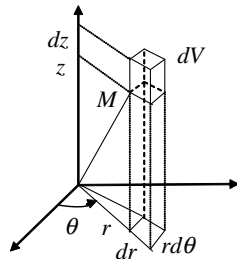


Figure 3.8

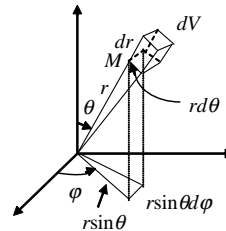


Figure 3.9

Exemple 3.3 Calculer le moment d'inertie d'un cylindre plein, homogène, de rayon R et hauteur h , par rapport à son axe de révolution. On choisit le repère de telle sorte que l'axe de révolution Δ soit l'axe des z (Figure 3.10).

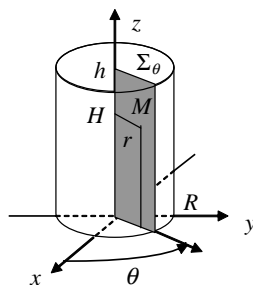


Figure 3.10

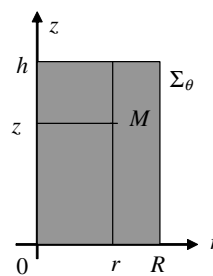


Figure 3.11

On voit sur la figure 3.10 que la distance du point M à l'axe est précisément le r des coordonnées cylindriques. Ainsi, si μ est la masse volumique, on a

$$J_{\Delta} = \mu \iiint_{\Sigma} \|\overrightarrow{MH}\|^2 dV = \mu \iiint_{\Sigma} r^2 dV = \mu \iiint_{\Sigma} r^3 dr d\theta dz.$$

En coordonnées cylindriques, on balaye le domaine d'intégration par θ . Ici θ varie de 0 à 2π . Pour θ fixé, la section Σ_{θ} de Σ se représente dans le plan Orz (Figure 3.11) et c'est ici un *rectangle*. On a donc visiblement $r_{\min} = 0$, $r_{\max} = R$, $z_{\min}(\theta, r) = 0$, $z_{\max}(\theta, r) = h$. Ainsi

$$J_{\Delta} = \mu \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\iint_{\Sigma_{\theta}} r^3 dr dz \right) d\theta = \mu \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} r^3 \left(\int_{z=0}^{z=h} dz \right) dr \right) d\theta.$$

On retrouve la notion d'*intégrale sur un pavé*, déjà vue pour les intégrales doubles : les bornes pour θ , r et z sont *indépendantes*. L'intégrale triple se décompose alors sous la forme d'un produit de trois intégrales simples :

$$J_{\Delta} = \mu \int_{z=0}^{z=h} dz \times \int_{r=0}^{r=R} r^3 dr \times \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = \frac{\pi}{2} \mu h R^4.$$

En général, le moment d'inertie d'un solide s'exprime à l'aide de la masse totale \mathcal{M} . En notant V le volume du solide, on a $\mathcal{M} = \mu V$. Ici $V = \pi R^2 h$, donc $\mu = \frac{\mathcal{M}}{V} = \frac{\mathcal{M}}{\pi R^2 h}$ et

$$J_{\Delta} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\mathcal{M}}{\pi R^2 h} \times h R^4 = \frac{1}{2} \mathcal{M} R^2.$$

Remarque 3.1. L'utilisation des coordonnées cylindriques dans un calcul d'intégrale triple est recommandée lorsque le domaine d'intégration Σ est un *solide de révolution* : cylindre, cône de révolution, ... à l'exception de la sphère, où on utilise plutôt les coordonnées sphériques.

3.4 Calcul en coordonnées sphériques

L'élément de volume en coordonnées sphériques s'obtient en faisant varier r de dr , θ de $d\theta$ et φ de $d\varphi$ (Figure 3.9). Alors dV est un parallélépipède rectangle infinitésimal de longueur dr , de largeur $r d\theta$ (arc de cercle de rayon r , d'angle au centre $d\theta$). Sa troisième arête a pour longueur $r \sin \theta d\varphi$ (arc de cercle de rayon $r \sin \theta$, d'angle au centre $d\varphi$). Par conséquent

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (3.9)$$

L'intégrale triple I s'écrit alors

$$I = \iiint_{\Sigma} f(M) dV = \iiint_{\Sigma} f(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (3.10)$$

On balaye à nouveau le domaine d'intégration par rotation autour de l'axe Oz , c'est-à-dire ici grâce à l'angle φ , et il vient

$$I = \int_{\varphi=\varphi_{\min}}^{\varphi=\varphi_{\max}} \left(\iint_{\Sigma_{\varphi}} f(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\theta dr \right) d\varphi. \quad (3.11)$$

On utilise les coordonnées sphériques lorsque le domaine d'intégration est une sphère ou portion de sphère.

Exemple 3.4 Soit $R > 0$. Calculer $I = \iiint_{\Sigma} z dx dy dz$, où

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}.$$

Ici Σ est l'intérieur d'une demi-sphère de centre O de rayon R (Figure 3.12).

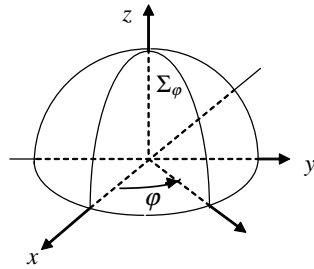


Figure 3.12

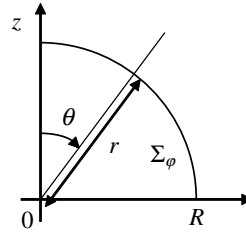


Figure 3.13

Pour transformer l'intégrale I , donnée en coordonnées cartésiennes, on remplace z par $r \cos \theta$ et $dV = dx dy dz$ par $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$. En coordonnées sphériques, on balaye le domaine d'intégration par φ , qui varie de 0 à 2π . Pour φ fixé, la section de Σ est représentée dans la figure 3.13. C'est un quart de disque. On voit que $\theta_{\min} = 0$, $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$, $r_{\min}(\varphi, \theta) = 0$, $r_{\max}(\varphi, \theta) = R$. Donc

$$I = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\iint_{\Sigma_\varphi} r^3 \sin \theta \cos \theta dr d\theta \right) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=0}^{r=R} r^3 dr \right) \sin \theta \cos \theta d\theta \right) d\varphi.$$

Il s'agit, là encore, d'une intégrale triple sur un pavé. Elle se décompose sous la forme d'un produit de trois intégrales simples :

$$I = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \times \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \times \int_{r=0}^{r=R} r^3 dr = 2\pi \times \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \frac{\pi}{4} R^4.$$

3.5 Centre d'inertie d'un solide

3.5.1 Solide idéal

Considérons d'abord le cas idéal où le solide (S) est formé d'un nombre fini de points matériels A_1, \dots, A_n , de masses respectives m_1, \dots, m_n . On parle ici de *masses* au sens de la physique. Par définition, le *centre d'inertie du solide* (S) est le barycentre² G du système $(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)$. Il vérifie donc la relation

$$m_1 \overrightarrow{GA_1} + m_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}. \quad (P1)$$

En outre, pour tout point M de l'espace, on sait que

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\mathcal{M}} \left(m_1 \overrightarrow{MA_1} + m_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{MA_n} \right), \quad (P2)$$

où $\mathcal{M} = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ est la masse totale du solide. Si l'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on déduit immédiatement de (P2) en prenant $M = O$ que le centre d'inertie G de $(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)$ a pour coordonnées

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{\mathcal{M}} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n) = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^n m_k x_k, \\ y_G = \frac{1}{\mathcal{M}} (m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n) = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^n m_k y_k, \\ z_G = \frac{1}{\mathcal{M}} (m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n) = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^n m_k z_k, \end{cases} \quad (3.12)$$

où x_k, y_k et z_k sont les coordonnées de A_k pour tout $k = 1, 2, \dots, n$. On notera que (3.12) exprime que les coordonnées du centre d'inertie sont les *moyennes pondérées* des coordonnées des points du système.

²Voir la section 6.5 de *Toutes les mathématiques* (page 59), qui contient toutes les démonstrations des propriétés du barycentre.

Il résulte en outre des propriétés générales des barycentres que le centre d'inertie d'un solide idéal vérifie les propriétés suivantes :

(P3) Si les points matériels $(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)$ sont alignés sur une droite (D) , alors leur centre d'inertie G appartient à (D) .

(P4) Si les points matériels $(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)$ sont coplanaires dans un plan (P) , alors leur centre d'inertie G appartient à (P) .

(P5) Le centre d'inertie d'un système de points matériels est inchangé $(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)$ si on multiplie tous les masses m_1, \dots, m_n par un même réel $\lambda \neq 0$.

(P6) Si G est le centre d'inertie du système de points matériels

$$(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_p, m_p), (A_{p+1}, m_{p+1}), \dots, (A_n, m_n),$$

et si G' est le centre d'inertie de $(A_1, m_1), \dots, (A_p, m_p)$, alors G est le centre d'inertie de

$$(G', m_1 + m_2 + \dots + m_p), (A_{p+1}, m_{p+1}), \dots, (A_n, m_n).$$

Ce dernier résultat est connu sous le nom de *théorème d'associativité*. Il montre que, dans un calcul de centre d'inertie, on peut remplacer une partie des points du système par leur centre d'inertie, affecté de la *somme des masses* de cette partie.

3.5.2 Solide réel

Un solide réel, avec une *distribution continue des masses*, est constitué d'une infinité de points A . On entoure chaque point A d'une masse infinitésimale dm . Dans la relation (P2) ci-dessus, la somme finie se transforme en intégrale. Le centre d'inertie G est alors *défini* ainsi : pour tout point M de l'espace,

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_S \overrightarrow{MA}.dm. \quad (3.13)$$

Dans ce cas, la relation (P1) s'écrit

$$\int_S \overrightarrow{GA}.dm = \vec{0}. \quad (3.14)$$

En notant x, y, z les coordonnées du point A qui décrit le solide (S) , on obtient en remplaçant dans (3.13) le point M par l'origine O du repère les coordonnées x_G, y_G et z_G du centre d'inertie :

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_S x dm, \quad y_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_S y dm, \quad z_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_S z dm. \quad (3.15)$$

Ces formules sont à comparer à (3.12). Dans les calculs, on sera conduit à distinguer *trois cas* :

a) Le solide est un *fil homogène*, de *masse linéique* (par unité de longueur) μ . On entoure le point A d'une longueur infinitésimale de fil dl , et on a $dm = \mu dl$. Les intégrales dans (3.13), (3.14) et (3.15) sont des *intégrales simples*.

b) Le solide est une *plaque homogène*, de *masse surfacique* μ . On entoure le point A d'une surface infinitésimale $d\sigma$, et on a $dm = \mu d\sigma$. Les intégrales dans (3.13), (3.14) et (3.15) sont des *intégrales doubles*.

c) Le solide est un *volume homogène*, de *masse volumique* μ . On entoure le point A d'un volume infinitésimal dV , et on a $dm = \mu dV$. Les intégrales dans (3.13), (3.14) et (3.15) sont des *intégrales triples*.

Les calculs sont souvent simplifiés par l'utilisation du théorème d'associativité (P6) ou l'existence de symétries, à partir des deux résultats suivants :

(P7) Si le solide (S) est homogène et admet un centre de symétrie, alors son centre d'inertie est ce centre de symétrie.

(P8) Si le solide (S) est homogène et admet un axe de symétrie (Δ) , alors son centre d'inertie appartient à (Δ) .

Démontrons par exemple la propriété (P8) à l'aide de la figure 3.14. A tout point A de (S) , entouré d'un volume infinitésimal dV , associons son symétrique A' , entouré du même volume dV . Le solide étant

homogène, les points A et A' sont entourés de la même masse infinitésimale $dm = \mu dV$. Leur barycentre partiel est donc leur milieu I , qui appartient à (Δ) . Ainsi tous les barycentres partiels associés à tous les couples (A, A') par le théorème d'associativité (P6) sont sur (Δ) . Le centre d'inertie G , barycentre de ces barycentres partiels, appartient donc à (Δ) en vertu de (P3).

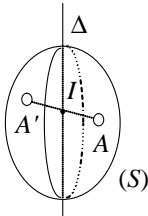


Figure 3.14

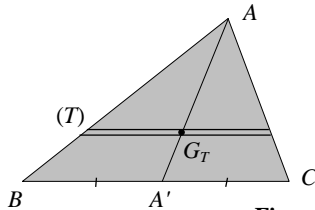


Figure 3.15

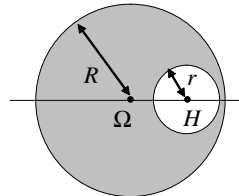


Figure 3.16

Exemple 3.5 Déterminons le centre d'inertie G de la plaque triangulaire homogène de la figure 3.15. Pour cela, découpons-la en bandes infiniment minces, parallèles à (BC) . Chacune de ces bandes peut être assimilée à une tige homogène (T) . Puisque (T) admet un centre de symétrie, le centre d'inertie de (T) est son milieu G_T . D'après la réciproque du théorème de Thalès, on sait que G_T appartient à la médiane (AA') . Par le théorème d'associativité, G est barycentre de tous les G_T pour toutes les bandes infiniment minces (T) , chacun d'entre eux étant affecté de la masse de la tranche. Donc $G \in (AA')$ en vertu de (P3). De même $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$. Ainsi le centre d'inertie de la plaque triangulaire homogène ABC est le centre de gravité du triangle ABC .

Exemple 3.6 Déterminons le centre d'inertie G du disque homogène troué de la figure 3.16. Soit M la masse totale du grand disque (avant qu'il soit troué) et soit m la masse du petit disque retiré. Il est clair que G est le barycentre de (Ω, M) et $(H, -m)$. En notant μ la masse surfacique, on a $M = \pi R^2 \mu$ et $m = \pi r^2 \mu$. Donc G est le barycentre de (Ω, R^2) et $(H, -r^2)$ en vertu du théorème d'associativité. Ainsi pour tout point K du plan on a

$$\overrightarrow{KG} = \frac{R^2 \overrightarrow{K\Omega} - r^2 \overrightarrow{KH}}{R^2 - r^2}.$$

En prenant $K = \Omega$, on en déduit

$$\overrightarrow{\Omega G} = \frac{-r^2}{R^2 - r^2} \overrightarrow{\Omega H},$$

ce qui permet de construire G lorsque R, r, Ω et H sont donnés.

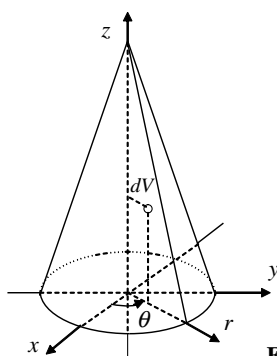


Figure 3.17

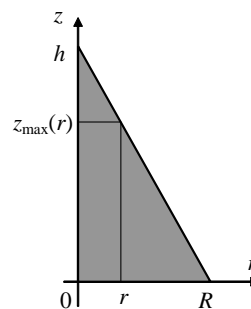


Figure 3.18

Exemple 3.7 Déterminons le centre d'inertie G du cône de révolution homogène plein (Figure 3.17). Puisque Oz est un axe de symétrie, on sait que $G \in Oz$. On a donc seulement à calculer z_G à partir de la formule (3.15). En notant μ la masse volumique et V le volume du cône, on a

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_S z dm = \frac{1}{\mu V} \iiint_S z \mu dV = \frac{1}{V} \iiint_S z dV.$$

On utilise les coordonnées cylindriques en procédant exactement comme dans l'exercice 3.6.b. On a $V =$

$\frac{1}{3}\pi R^2 h$, et la figure 3.18 montre que

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{3}{\pi R^2 h} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} r \left(\int_{z=0}^{z=h(1-\frac{r}{R})} z dz \right) dr \right) d\theta = \frac{3h}{2\pi R^2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} r \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 dr \right) d\theta \\ &= \frac{3h}{R^2} \int_{r=0}^{r=R} \left(r - 2\frac{r^2}{R} + \frac{r^3}{R^2} \right) dr = \frac{3h}{R^2} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{2r^3}{3R} + \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R = \frac{1}{4}h. \end{aligned}$$

Ce résultat se généralise à un cône quelconque (Exercice 3.18).

3.5.3 Théorèmes de Pappus-Guldin

Considérons d'abord un fil homogène (F), de centre d'inertie G , de longueur l , entièrement situé dans le demi-plan $x \geq 0$ (Figure 3.19). En tournant autour de l'axe Oy , ce fil balaye une *surface de révolution* S (Figure 3.20).

Le *premier théorème de Pappus-Guldin* affirme que

$$S = 2\pi x_G l. \quad (3.16)$$

Pour démontrer (3.16), découpons la surface S en bandes horizontales infinitésimales (Figure 3.20). Chacune de ces bandes peut être assimilée à un rectangle infinitésimal de longueur $2\pi x$ (remarquer que $x \geq 0$) et de largeur dl . Donc

$$S = \int_F 2\pi x dl = 2\pi \int_F x dl. \quad (3.17)$$

Or $x_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_F x dm = \frac{1}{\mu l} \int_F x \mu dl = \frac{1}{l} \int_F x dl$, d'où $S = 2\pi x_G l$ par (3.17).

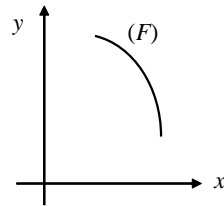


Figure 3.19

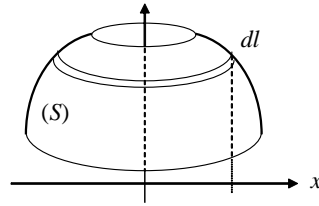


Figure 3.20

Exemple 3.8 Le *tore circulaire* s'obtient en faisant tourner le cercle de rayon R de la figure 3.21 autour de l'axe des y (Figure 3.22). Si on considère ce fil comme un solide homogène, son centre d'inertie est son centre de symétrie Ω , et sa longueur l vaut $l = 2\pi R$. Grâce au premier théorème de Pappus-Guldin, on obtient la surface du tore circulaire, $S = 4\pi^2 a R$.

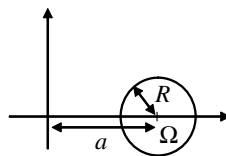


Figure 3.21

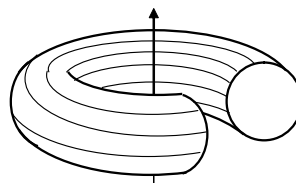


Figure 3.22 : Tore circulaire

Exemple 3.9 Soit le fil homogène demi-circulaire de la figure 3.23. On cherche son centre d'inertie G . Par symétrie, $G \in Ox$, et on a à calculer x_G . Faisons tourner le fil autour de l'axe des y . La surface balayée est la sphère de rayon R , de surface $S = 4\pi R^2$. Grâce au premier théorème de Pappus-Guldin, on obtient $4\pi R^2 = 2\pi x_G \times \pi R$. Donc $x_G = \frac{2}{\pi} R$.

Le deuxième théorème de Pappus-Guldin est analogue au premier, mais au lieu d'utiliser un fil, on utilise une *plaque homogène* de surface S située dans le demi-plan $x \geq 0$ (Figure 3.24). Par révolution autour de Oy , celle-ci balaye un volume V . Si G le centre d'inertie de la plaque homogène, alors

$$V = 2\pi x_G S. \quad (3.18)$$

La démonstration du deuxième théorème de Pappus-Guldin utilise la formule de Green-Riemann (voir Exercice 3...).

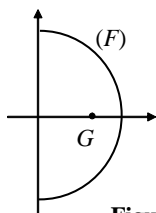


Figure 3.23

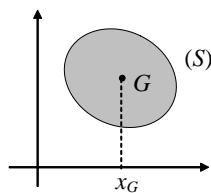


Figure 3.24

Exemple 3.10 Pour obtenir le volume du tore circulaire de la figure 3.22, on utilise un disque homogène, de surface $S = \pi R^2$, de centre d'inertie Ω . En appliquant (3.18), il vient $V = 2\pi a \times \pi R^2 = 2\pi^2 a R^2$.

Exemple 3.11 Au lieu d'un fil dans la figure 3.23, considérons une plaque demi-circulaire homogène de centre d'inertie $G \in (Ox)$, de surface $S = \frac{1}{2}\pi R^2$. Par révolution autour de Oy , cette plaque balaye la sphère de centre O de rayon R , de volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Par le deuxième théorème de Pappus-Guldin, on obtient $\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi x_G \times \frac{1}{2}\pi R^2$. Donc $x_G = \frac{4}{3\pi}R$.

Exercices

Les basiques

Exercice 3.1 (A) Calculer l'intégrale triple $I = \iiint_D x dx dy dz$, avec

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + 2z \leq 2\}.$$

Exercice 3.2 (A) Calculer l'intégrale triple

$$I = \iiint_D \frac{dx dy dz}{(x + y + z)^4},$$

où D est défini par

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 2\}.$$

Exercice 3.3 (B) Calculer $I = \iiint_D z^2 dx dy dz$, avec

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\},$$

en utilisant les coordonnées cylindriques ($a > 0$ et $h > 0$ sont des paramètres).

Exercice 3.4 (C) Soit α, β , vérifiant $0 < \alpha < \beta$. Soit

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \alpha^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq \beta^2, z \geq 0\},$$

Calculer en utilisant les coordonnées sphériques

$$I = \iiint_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Exercice 3.5 (C) Soient $h > 0$ et $R > 0$, avec $h > R$. On considère la sphère (Σ) de centre O de rayon R , et le point P de l'axe Oz , de cote h .

1) Soit M intérieur à (Σ) . Exprimer $\|\overrightarrow{MP}\|$ en fonction des coordonnées sphériques (r, θ, φ) de M .

2) Calculer l'intégrale triple

$$I = \iiint_D \frac{dV}{\|\overrightarrow{MP}\|},$$

où D est l'intérieur de (Σ) , et où dV est un volume infinitésimal entourant M intérieur à (Σ) .

Exercice 3.6 (B,C) En utilisant les intégrales triples, calculer

a) Le volume de la sphère de rayon R .

b) Le volume du cône de révolution de hauteur h et de rayon de base R .

Exercice 3.7 (D,E) On considère un fil homogène en forme de quart de cercle (Figure 3.25). Calculer les coordonnées de son centre d'inertie :

- 1) Par le calcul intégral.
- 2) En utilisant le premier théorème de Pappus-Guldin.

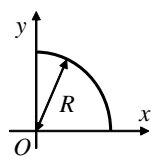


Figure 3.25

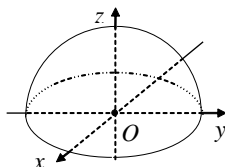


Figure 3.26

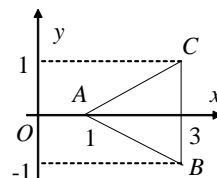


Figure 3.27

Exercice 3.8 (D) Calculer les coordonnées du centre d'inertie d'une demi-sphère pleine homogène de rayon R (Figure 3.26).

Exercice 3.9 (E) Le triangle ABC de la figure 3.27 effectue une révolution complète autour de l'axe Oy . Calculer la surface S et le volume V du solide qu'il engendre.

Les techniques

Exercice 3.10 Calculer le moment d'inertie d'une barre rectiligne homogène, de longueur $2l$, de masse totale \mathcal{M} , par rapport à un axe Δ passant par son milieu O (Figure 3.28).

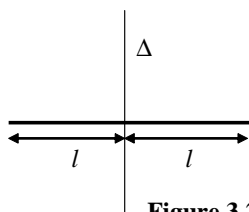


Figure 3.28

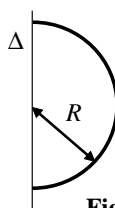


Figure 3.29

Exercice 3.11 Calculer le moment d'inertie d'un fil demi-circulaire homogène, de rayon R , de masse totale \mathcal{M} , par rapport à un axe Δ passant par son centre (Figure 3.29).

Exercice 3.12 Calculer le moment d'inertie d'un disque homogène, de rayon R , de masse totale \mathcal{M} , par rapport à un axe Δ passant par son centre et qui lui est perpendiculaire.

Exercice 3.13 Calculer le moment d'inertie d'un parallélépipède rectangle, plein et homogène, d'arêtes principales $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, de masse \mathcal{M} , par rapport à l'axe (OC) .

Exercice 3.14 Calculer le moment d'inertie d'un cône de révolution de rayon R , de hauteur h , plein et homogène, de masse totale \mathcal{M} , par rapport à son axe de révolution (Δ) .

Exercice 3.15 Calculer le moment d'inertie d'une sphère de rayon R , pleine et homogène, de masse totale \mathcal{M} , par rapport à un axe (Δ) passant par son centre.

Exercice 3.16 Calculer le centre d'inertie du cône de révolution plein et homogène d'axe Oz , de rayon R , de hauteur h , de sommet $\Omega(0,0,h)$ (la base du cône est dans le plan Oxy).

Les exotiques et les olympiques

Exercice 3.17 Comment pourrait-on vérifier expérimentalement le résultat du calcul de l'exemple 3.5 ?

Exercice 3.18 Soit (C) une courbe fermée située dans un plan (P) et Ω un point de l'espace n'appartenant pas à (P) (Figure 3.30). Une génératrice (Δ) passant par Ω et s'appuyant sur (C) décrit le cône de sommet Ω et de base (C) . La distance de Ω au plan (P) s'appelle la hauteur h du cône, et la surface S intérieure à (C) sa surface de base.

- 1) Comment s'appelle le cône lorsque (C) est un triangle, un quadrilatère, un cercle ?
- 2) Calculer le volume intérieur au cône en fonction de S et h .
- 3) Déterminer le centre d'inertie du cône plein homogène.

4) Etudier l'analogie entre triangle dans le plan et cône dans l'espace.

Exercice 3.19 Démontrer le deuxième théorème de Pappus-Guldin.

Exercice 3.20 Soit l'*hypersphère* de \mathbb{R}^4 , d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2$. Définir et calculer son hypervolume.

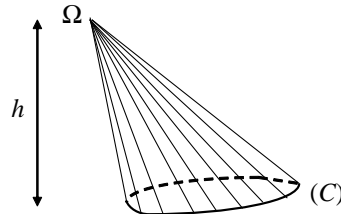


Figure 3.30

Chapitre 4

Analyse vectorielle

L'analyse vectorielle fait intervenir à la fois des outils analytiques (dérivées partielles) et du calcul vectoriel. Les notions de base de l'analyse vectorielle sont indispensables en électrostatique, en électromagnétisme, en mécanique des fluides. Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :

- A. Connaître les opérateurs de l'analyse vectorielle (nabla, gradient, divergence et rotationnel) et savoir démontrer leurs propriétés.
- B. Savoir calculer des intégrales de surface simples.
- C. Connaître la définition du flux d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée, et savoir calculer des flux simples.
- D. Savoir ce qu'est un champ à flux conservatif.
- E. Connaître les formules de Stokes et d'Ostrogradski.
- F. Savoir ce qu'est un angle solide.

4.1 Opérateurs de l'analyse vectorielle

L'espace est rapporté à la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On définit l'opérateur aux dérivées partielles *nabla* par

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (4.1)$$

On notera que *nabla* est un *opérateur aux dérivées partielles*, et pas un vecteur. Il opère à *gauche* en utilisant les trois types de multiplication vectorielle. Par exemple, soit d'abord $U = U(M)$ une fonction de trois variables (fonction scalaire). On définit le *gradient* de U par

$$\vec{\text{grad}}U = \vec{\nabla}U = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}.$$

On retrouve (1.13). Si $\vec{E} = \vec{E}(M) = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ un champ de vecteurs, on définit la *divergence* de \vec{E} par

$$\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (4.2)$$

et le *rotationnel* de \vec{E} par

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (4.3)$$

Remarque 4.1 L'opérateur nabla est essentiellement une *notation*, très commode pour retenir les définitions du gradient, de la divergence et du rotationnel. On notera que $\overrightarrow{\text{grad}}U$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}$ sont des *vecteurs* de \mathbb{R}^3 , alors que $\text{div}\vec{E}$ est un nombre réel, c'est-à-dire un *scalaire*.

Exemple 4.1 Soit k un paramètre. Considérons le *champ newtonien* défini en coordonnées sphériques¹ par

$$\vec{E} = \overrightarrow{E}(M) = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r.$$

Puisque $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$, on a

$$\vec{E} = k \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} = \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}). \quad (4.4)$$

Il en résulte que

$$\text{div}\vec{E} = k \frac{\partial}{\partial x} \left[(x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right)$$

En utilisant la formule qui donne la dérivée d'un produit, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right) &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} (x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} (-2x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Les dérivées partielles par rapport à y et z s'obtiennent sans calcul en permutant les rôles de x et y et ceux de x et z respectivement. Ainsi

$$\text{div}\vec{E} = k \frac{(-2x^2 + y^2 + z^2) + (x^2 - 2y^2 + z^2) + (x^2 + y^2 - 2z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0.$$

Un *champ newtonien* est à divergence nulle. Un calcul analogue montre qu'on a aussi $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0}$ (Exercice 4.1).

Remarque 4.2. Composons la divergence et le gradient :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}U) = \text{div} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

On introduit ainsi un nouvel opérateur, le *laplacien* :

$$\Delta U = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}U) = \overrightarrow{\nabla}^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (4.5)$$

A partir des définitions, on peut démontrer des *formules d'analyse vectorielle*. Les deux plus importantes, qui doivent être connues, sont

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}U) = \vec{0}, \quad \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = 0. \quad (4.6)$$

Voir l'exercice 4.2 pour leur démonstration. Les exercices 4.3 et 4.4 donnent d'autres exemples de formules utiles.

4.2 Surfaces de l'espace

4.2.1 Représentation d'une surface

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une *surface* (Σ) est définie par une équation de la forme $F(x, y, z) = 0^2$. Par exemple, l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est celle d'un plan, tandis

¹ Voir (1.17).

² De même, dans le plan rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , une *courbe* (C) est définie par une équation de la forme $F(x, y) = 0$.

que l'équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$ est celle de la sphère de centre Ω de rayon R . Un troisième exemple important est le suivant.

Exemple 4.2 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. L'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.7)$$

est celle d'un *ellipsoïde* de centre O , d'axes principaux Ox, Oy, Oz . Pour visualiser cette surface, coupons-la par un plan horizontal d'équation $z = z_0$, avec $-c < z_0 < c$. La section correspondante a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{c^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Il s'agit donc d'une ellipse. Ainsi la section d'un ellipsoïde par un plan horizontal est une ellipse³. Il en est de même lorsqu'on coupe l'ellipsoïde par un plan $x = x_0$ ou $y = y_0$. Ainsi un ellipsoïde a la forme d'un ballon de rugby aplati, comme représenté figure 4.1. Si $a = b = c = R$, l'ellipsoïde est la sphère de centre O de rayon R .

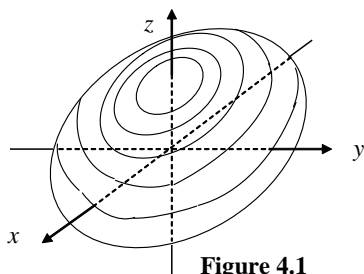


Figure 4.1

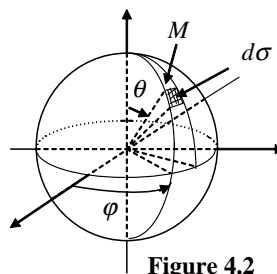


Figure 4.2

Il est souvent commode d'utiliser une *représentation paramétrique* d'une surface. Puisqu'une surface est un objet à deux dimensions, il est nécessaire d'utiliser deux paramètres⁴. Ainsi une représentation paramétrique d'une surface est de la forme $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$. On parle alors de *nappe paramétrée*.

Exemple 4.3 La surface de la sphère de centre O de rayon R peut être paramétrée par

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta, \quad (4.8)$$

où θ varie entre 0 et π , tandis que φ varie entre 0 et 2π (Figure 4.2). En effet, le paramétrage (4.8) n'est pas autre chose que les formules de passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes, avec $r = R$ (Formules (5.21) de *Toutes les mathématiques*), puisque le point M se déplace à la surface de la sphère.

4.2.2 Vecteur normal à une surface

Théorème 4.1 Un vecteur normal (ou orthogonal) à la surface (Σ) d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$ au point $M(x, y, z)$ est le vecteur $\vec{N} = \overrightarrow{\text{grad}}F(M)$.

Démonstration Déplaçons le point M d'un déplacement infinitésimal $d\vec{M}$ en restant sur la surface (Σ) (Figure 4.3). Alors F reste égal à 0 dans ce déplacement, de telle sorte que $dF = 0$. Or $dF = \overrightarrow{\text{grad}}F(M) \cdot d\vec{M}$ en vertu de (1.14). Il en résulte que $\overrightarrow{\text{grad}}F(M) \cdot d\vec{M} = 0$ pour tout déplacement $d\vec{M}$ sur (Σ) , c'est-à-dire que $\overrightarrow{\text{grad}}F(M)$ et $d\vec{M}$ sont orthogonaux pour tout déplacement infinitésimal sur la surface de (Σ) à partir

³Pour une présentation élémentaire de l'ellipse, voir le chapitre 2 du complément *Courbes et géométrie différentielle* sur le site touteslesmaths.fr.

⁴Un seul paramètre suffit pour les *courbes paramétrées*. Voir le chapitre 1 du complément *Courbes et géométrie différentielle* sur le site touteslesmaths.fr.

de M . Ainsi $\overrightarrow{\text{grad}F}(M)$ est bien normal (orthogonal) à (Σ) au point M .

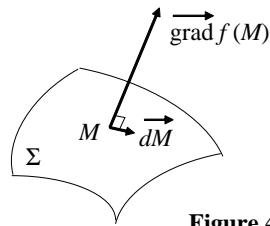


Figure 4.3

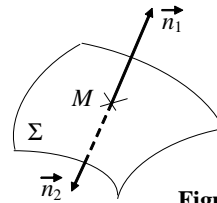


Figure 4.4

Exemple 4.4 Si (P) est le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, un vecteur normal à (P) est

$$\vec{N} = \overrightarrow{\text{grad}F} = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}.$$

Le vecteur normal est indépendant de M . On retrouve le théorème 9.2 de *Toutes les mathématiques*.

Exemple 4.5 Soit $M(x, y, z)$ un point de l'ellipsoïde d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Un vecteur normal en M est

$$\vec{N} = \overrightarrow{\text{grad}F} = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k} = 2 \left(\frac{x}{a^2} \vec{i} + \frac{y}{b^2} \vec{j} + \frac{z}{c^2} \vec{k} \right).$$

Dans le cas particulier de la sphère de centre O de rayon R , on voit que

$$\vec{N} = \frac{2}{R^2} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = \frac{2}{R^2} \overrightarrow{OM}.$$

On retrouve ainsi que le rayon \overrightarrow{OM} est orthogonal à la surface de la sphère, ce qui est évident géométriquement.

Remarque 4.3 Soit \vec{N} un vecteur normal en un point M d'une surface (Σ) . On peut définir deux vecteurs normaux *unitaires* en M (Figure 4.4) :

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} \quad \text{et} \quad \vec{n}_2 = -\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = -\vec{n}_1.$$

Lorsqu'on a choisi un des deux vecteurs normaux unitaires, on dit qu'on a *orienté* la surface (Σ) . Ceci revient à définir un *sens positif de traversée* de (Σ) (dans le sens du vecteur normal unitaire \vec{n} choisi).

Remarque 4.4 On dit qu'une surface de l'espace est *fermée* lorsqu'elle délimite un intérieur et un extérieur. Par exemple une sphère ou un ellipsoïde sont des surfaces fermées. Par contre, un plan n'en est pas une. Par convention, *une surface fermée est toujours orientée vers l'extérieur*, c'est-à-dire que son vecteur normal unitaire est dirigé vers l'extérieur. Ainsi la sphère de centre O de rayon R est orientée par le vecteur normal unitaire

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \frac{1}{R} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}).$$

4.2.3 Lignes de champs et surfaces équipotentielles

Soit \vec{E} un champ de vecteurs. On appelle *ligne de champ* toute courbe (L) telle que, en tout point M de (L) , le champ \vec{E} en M est tangent à (L) .

Par exemple, si $\vec{E} = -g\vec{k}$ est le champ de pesanteur au voisinage du sol, les lignes de champ sont les droites verticales (Figure 4.5). Si

$$\vec{E} = \frac{k}{r^2}\vec{e}_r$$

est un champ newtonien d'origine O , les lignes de champ sont les droites passant par O (Figure 4.6).

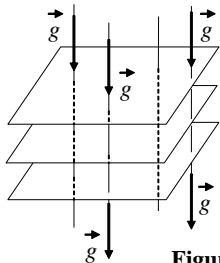


Figure 4.5

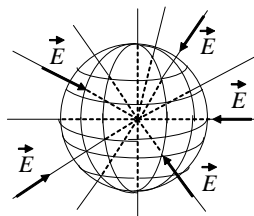


Figure 4.6

Supposons maintenant que le champ \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire V ; alors $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$. On appelle *surface équipotentielle* toute surface où les points sont au même potentiel, c'est-à-dire d'équation $V = C$, où C est une constante donnée.

Exemple 4.6 Soit $\vec{E} = -g\vec{k}$ le champ de pesanteur au voisinage du sol, qui dérive du potentiel scalaire $V = gz$ (Exemple 1.6). Les surfaces équipotentielles ont pour équation $gz = C$, c'est-à-dire $z = \frac{C}{g}$. Les surfaces équipotentielles sont donc les plans horizontaux $z = \text{constante}$ (Figure 4.5).

Exemple 4.7 Soit $\vec{E} = \frac{k}{r^2}\vec{e}_r$ un champ newtonien d'origine O . Il dérive du potentiel scalaire $V = \frac{k}{r}$ (Exemple 1.7). Les surfaces équipotentielles ont pour équation $\frac{k}{r} = C$, c'est-à-dire $r = \frac{k}{C}$. Ce sont donc les sphères d'équations $r = \text{constante}$ (Figure 4.6).

Dans ces deux exemples, on constate que *lignes de champ et surfaces équipotentielles se coupent à angle droit*. Ceci est un résultat général, car un vecteur normal à la surface équipotentielle $V = C$ en M est $\vec{N} = \vec{\text{grad}}V = -\vec{E}$ en vertu du théorème 4.1. Ainsi le champ \vec{E} est orthogonal à la surface équipotentielle au point M . Et puisque \vec{E} est tangent à la ligne de champ, celle-ci coupe la surface équipotentielle à angle droit.

4.2.4 Intégrales de surface

Une *intégrale de surface* est une intégrale de la forme

$$I = \iint_{\Sigma} f(M) d\sigma. \quad (4.9)$$

Ici Σ désigne une surface de l'espace, le point M décrit Σ , f est une fonction de M , et $d\sigma$ est un morceau infinitésimal de surface entourant le point M . On notera que les intégrales doubles étudiées dans le chapitre 2 sont des cas particuliers d'intégrales de surface : dans ce cas Σ est une surface plane du plan Oxy . Pour calculer l'intégrale de surface (4.9), on choisit une représentation paramétrique de Σ . On obtient $d\sigma$ en faisant varier les deux paramètres de façon infinitésimale et on se ramène alors à un calcul d'intégrale double.

Exemple 4.8 Calculer $I = \iint_{\Sigma} z^2 d\sigma$, où Σ est la sphère de centre O de rayon R . On utilise le paramétrage de la sphère donné par (4.8). Pour obtenir $d\sigma$, faisons varier θ de $d\theta$ et φ de $d\varphi$ (Figure 4.2). On obtient à la surface de Σ un rectangle infinitésimal d'aire $d\sigma$. Ce rectangle a pour longueur $Rd\theta$ et pour largeur $R\sin\theta d\varphi$ (voir le calcul de dV en coordonnées sphériques, Section 3.4). Donc

$$d\sigma = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (4.10)$$

Pour décrire Σ , θ varie entre 0 et π et φ varie entre 0 et 2π . D'où

$$I = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} (R \cos\theta)^2 R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = R^4 \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = R^4 \left[-\frac{1}{3} \cos^3\theta \right]_0^{\pi} \times [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi R^4.$$

4.3 Flux d'un champ de vecteurs

Soit \vec{E} un champ de vecteurs et (Σ) une surface de l'espace (Figure 4.7). On désire *mesurer la quantité de champ qui traverse la surface* (Σ) . Pour cela, on commence par orienter cette surface (de manière arbitraire, sauf s'il s'agit d'une surface fermée) grâce à un vecteur normal unitaire \vec{n} .

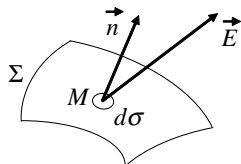


Figure 4.7

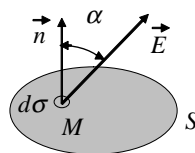


Figure 4.8

On prend ensuite en compte l'angle formé, localement au point M , entre le champ \vec{E} et \vec{n} . La quantité de champ qui traverse (Σ) sera d'autant plus grande que cet angle sera petit, c'est-à-dire que le produit scalaire $\vec{E} \cdot \vec{n}$ sera plus grand. On définit donc le *flux infinitésimal* qui traverse la surface $d\sigma$ au point M par

$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \vec{E} \cdot \vec{d\sigma}, \quad (4.11)$$

où on a posé $\vec{n} d\sigma = \vec{d\sigma}$ (élément de surface orienté). Le *flux du champ* \vec{E} à travers la surface orientée (Σ) sera donc défini par l'intégrale de surface

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{d\sigma}, \quad (4.12)$$

Exemple 4.9 Soit \vec{E} un champ constant. Posons $E = \|\vec{E}\|$. Soit (Σ) une surface plane orientée (Figure 4.8) d'aire S . Alors le vecteur normal unitaire \vec{n} à (Σ) forme avec \vec{E} un angle α indépendant de M . Le flux de E à travers (Σ) vaut

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\Sigma} \|\vec{E}\| \cdot \|\vec{n}\| \cos \alpha d\sigma.$$

Puisque $\|\vec{n}\| = 1$, il vient

$$\phi = E \cos \alpha \iint_{\Sigma} d\sigma = ES \cos \alpha.$$

Remarque 4.5 Le calcul du flux d'un champ newtonien à travers une surface orientée est plus difficile. Il conduit à la notion d'angle solide (Section 4.5).

4.4 Formules de Stokes et d'Ostrogradski

4.4.1 Expression intrinsèque de la divergence

Nous avons défini la divergence d'un champ à partir de l'opérateur nabla. Cette définition n'est pas intrinsèque, puisqu'elle se fait à partir des coordonnées cartésiennes x, y, z . La *définition intrinsèque* de la divergence en un point M utilise la notion de flux et s'énonce ainsi : donnons-nous un volume infinitésimal dV entourant le point M , et orientons la surface infinitésimale dS qui délimite dV vers l'extérieur (surface fermée). Alors le flux du champ \vec{E} à travers dS vaut

$$d\phi = \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV. \quad (4.13)$$

Ainsi la divergence mesure-t-elle la quantité de champ qui sort localement (diverge) du point M .

Exemple 4.10 Utilisons l'expression intrinsèque $d\phi = \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV$ pour retrouver l'expression (4.2) de la divergence en coordonnées cartésiennes. Nous considérons au point $M(x, y, z)$ le volume infinitésimal dV

limité par les plans d'abscisses x et $x + dx$, y et $y + dy$, z et $z + dz$ (Figure 4.9).

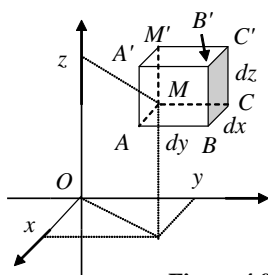


Figure 4.9

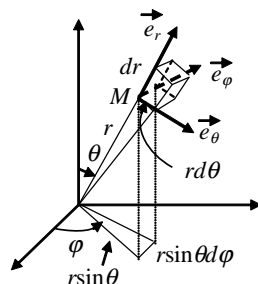


Figure 4.10

On a $dV = dx dy dz$ et le vecteur normal à la face $ABB'A'$ est \vec{i} ; cette face a pour aire $dy dz$. Puisque tous les points de cette face ont pour abscisse $x + dx$, le flux $d\phi_1$ à travers $ABB'A'$ vaut

$$d\phi_1 = \vec{E} \cdot \vec{i} \cdot dy dz = E_x(x + dx, y, z) dy dz.$$

De même, le vecteur normal à $MCC'M'$ est $-\vec{i}$, et le flux $d\phi_2$ à travers $MCC'M'$ vaut

$$d\phi_2 = -\vec{E} \cdot \vec{i} \cdot dy dz = -E_x(x, y, z) dy dz.$$

Donc le flux infinitésimal à y et z constants vaut

$$d\phi_{y,z} = d\phi_1 + d\phi_2 = [E_x(x + dx, y, z) - E_x(x, y, z)] dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz.$$

En procédant de même pour les quatre autres faces de dV , on voit que le flux sortant de dV a pour valeur

$$d\phi = d\phi_{y,z} + d\phi_{x,z} + d\phi_{x,y} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

En remplaçant dans (4.13) et en divisant par $dx dy dz$, on obtient bien

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Exemple 4.11 Calculons l'expression de la divergence en coordonnées sphériques. On connaît alors \vec{E} dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sous la forme

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta + E_\varphi \vec{e}_\varphi.$$

Le volume dV (Figure 4.10) est le volume habituel des coordonnées sphériques et vaut $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$. La face qui a pour vecteur normal $-\vec{e}_r$ a pour aire $r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ et le flux correspondant vaut

$$d\phi_1 = -E_r(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Quand on augmente r de dr , le flux sortant à travers la face de vecteur normal \vec{e}_r vaut

$$d\phi_2 = E_r(r + dr, \theta, \varphi) (r + dr)^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Donc le flux sortant à θ et φ constants a pour expression

$$d\phi_{\theta,\varphi} = d\phi_1 + d\phi_2 = \left[E_r(r + dr, \theta, \varphi) (r + dr)^2 - E_r(r, \theta, \varphi) r^2 \right] \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

En raisonnant de même pour les autres faces, on voit que le flux total sortant du volume dV vaut

$$d\phi = d\phi_{\theta,\varphi} + d\phi_{r,\varphi} + d\phi_{r,\theta} = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) \sin \theta dr d\theta d\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) r dr d\theta d\varphi + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} r dr d\theta d\varphi.$$

En remplaçant dans (4.13) et en divisant par $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$, on obtient l'expression de la *divergence en coordonnées sphériques* :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Remarque 4.6 Le calcul de la divergence du champ newtonien, effectué en coordonnées cartésiennes dans l'exemple 4.1, est beaucoup plus simple en coordonnées sphériques. Dans ce cas en effet,

$$E_r = \frac{k}{r^2}, \quad E_\theta = 0 \quad \text{et} \quad E_\varphi = 0.$$

Ainsi $r^2 E_r = k = \text{constante}$, de telle sorte que $\operatorname{div} \vec{E} = 0$.

4.4.2 Expression intrinsèque du rotationnel

La *définition intrinsèque du rotationnel* utilise également la notion de flux. Soit une courbe fermée (C) orientée infinitésimale entourant le point M . Orientons la surface infinitésimale dS délimitée par (C) par la règle du tire-bouchon (Figure 4.11). Alors la circulation δW du champ \vec{E} le long de (C) vaut, par définition,

$$\delta W = \overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{E}} \cdot \vec{n} \cdot dS. \tag{4.14}$$

Ainsi δW est égale au flux du rotationnel de \vec{E} à travers dS . Le mot *rotationnel* vient de ce qu'on fait tourner le champ autour de M .

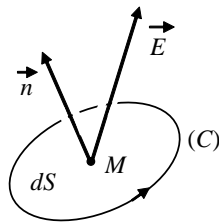


Figure 4.11

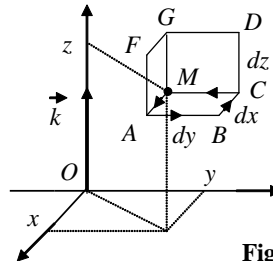


Figure 4.12

Exemple 4.12 Retrouvons l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes à partir de l'expression intrinsèque (4.14). Pour cela, examinons la figure 4.12 : la courbe orientée $MABC$ obtenue en faisant varier x de dx et y de dy , z restant constant, définit par la règle du tire-bouchon le vecteur normal $\vec{n} = \vec{k}$. En posant

$$\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{E}} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k},$$

où a , b et c sont inconnus, on a donc $\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{E}} \cdot \vec{n} = c$. Par ailleurs, la circulation de \vec{E} le long de la courbe orientée $MABC$ est la somme des circulations le long de MA , AB , BC et CM successivement, c'est-à-dire

$$\delta W = \vec{E}(x, y, z) \cdot \overrightarrow{MA} + \vec{E}(x + dx, y, z) \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{E}(x, y + dy, z) \cdot \overrightarrow{BC} + \vec{E}(x, y, z) \cdot \overrightarrow{CM}.$$

On a $\overrightarrow{MA} = dx \vec{i} = -\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} = dy \vec{j} = -\overrightarrow{CM}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \delta W &= [E_x(x, y, z) - E_x(x, y + dy, z)] dx + [E_y(x + dx, y, z) - E_y(x, y, z)] dy \\ &= [dE_y]_{y,z} dy - [dE_x]_{x,z} dx = \frac{\partial E_y}{\partial x} dx dy - \frac{\partial E_x}{\partial y} dy dx = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

En reportant dans (??), il vient

$$c dx dy = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

D'où la composante c du rotationnel. Les composantes a et b s'obtiennent de même, en utilisant les circuits $MCDG$ et $MGFA$ de la figure 4.12.

4.4.3 Formules de Stokes et d'Ostrogradski

Soit une courbe fermée (C) orientée de l'espace et une surface (Σ) s'appuyant sur (C), orientée à partir du sens de rotation sur (C) par la règle du tire-bouchon (Figure 4.13). La *formule de Stokes* s'énonce ainsi : la circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe fermée (C) est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface (Σ) s'appuyant sur (C) :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{M} = \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma. \quad (4.15)$$

La formule de Stokes résulte de la formule (4.14) par sommation. Ainsi (4.14) est la forme locale de la formule de Stokes.

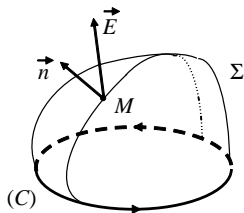


Figure 4.13

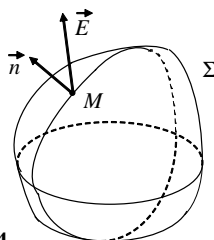


Figure 4.14

Soit maintenant une surface fermée (Σ) de l'espace (Figure 4.14), orientée vers l'extérieur (voir remarque 4.4). La *formule d'Ostrogradski* s'énonce : le flux d'un champ de vecteurs à travers la surface fermée (Σ) est égal à l'intégrale triple de sa divergence dans le domaine intérieur (D) délimité par (Σ), et s'écrit

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \iiint_D \text{div} \vec{E} \cdot dV. \quad (4.16)$$

La formule d'Ostrogradski s'obtient par sommation de (4.13), qui en est la forme locale.

Exemple 4.13 Retrouvons le volume de la sphère de centre O de rayon R à partir de sa surface et de la formule d'Ostrogradski. Pour cela, considérons le champ

$$\vec{E} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}),$$

de telle sorte que

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

En appliquant la formule d'Ostrogradski, il vient

$$V = \iiint_D dV = \iiint_D \text{div} \vec{E} \cdot dV = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma.$$

Or en utilisant la remarque 4.4, on voit que

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OM} \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \frac{1}{3} \|\overrightarrow{OM}\| = \frac{1}{3} R.$$

Ainsi

$$V = \frac{1}{3} R \iint_{\Sigma} d\sigma = \frac{1}{3} RS,$$

où S est la surface de la sphère. Puisque $S = 4\pi R^2$, on en déduit $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

4.4.4 Champs à flux conservatif

Définition 4.1 On dit que le champ \vec{E} est à flux conservatif dans une partie \mathcal{A} de l'espace si, en tout point M de \mathcal{A} , sa divergence est nulle.

Exemple 4.14 Un champ constant est un champ à flux conservatif dans tout l'espace.

Exemple 4.15 Le champ newtonien

$$\vec{E} = \vec{E}(M) = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r$$

est à flux conservatif dans toute partie \mathcal{A} de l'espace ne contenant pas O . En effet on a vu que $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ (Exemple 4.1 et Remarque 4.6). Il est cependant indispensable d'exclure le point O , car en ce point \vec{E} n'est pas défini.

Théorème 4.2 On suppose que \vec{E} est à flux conservatif dans une partie \mathcal{A} de l'espace. Soit (Σ) une surface fermée entièrement contenue dans \mathcal{A} . Alors le flux de \vec{E} à travers (Σ) est nul.

Démonstration Puisque \vec{E} est à flux conservatif, on a $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ en tout point M intérieur à (Σ) . Donc le flux de \vec{E} à travers (Σ) est nul par la formule d'Ostrogradski.

Une forme particulièrement intéressante de ce théorème s'obtient en considérant un *tube de champ* (Figure 4.15). Il s'agit d'une surface fermée comportant une surface d'entrée, une surface latérale formée de *lignes de champ*, et une surface de sortie.

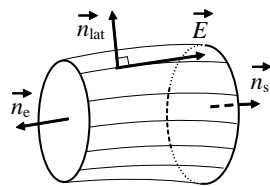


Figure 4.15

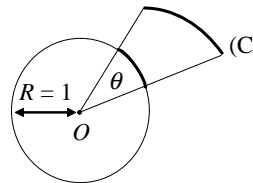


Figure 4.16

Notons ϕ_e le flux qui entre dans le tube de champ (compté donc comme positif) et ϕ_s le flux qui en sort. Le flux latéral ϕ_{lat} est nul car en chaque point M de la surface latérale, \vec{E} et \vec{n}_{lat} sont orthogonaux. Puisque la surface d'entrée est orientée vers l'extérieur, si \vec{E} est à flux conservatif le théorème 4.2 s'écrit $-\phi_e + \phi_{lat} + \phi_s = 0$. Ainsi $\phi_s = \phi_e$, c'est-à-dire :

Théorème 4.3 On suppose que \vec{E} est à flux conservatif dans une partie \mathcal{A} de l'espace. Soit (T) un tube de champ entièrement contenu dans \mathcal{A} . Alors le flux entrant dans (T) est égal au flux sortant.

4.5 Angle solide

La *définition géométrique* de l'angle solide est très simple. Soit d'abord, dans le plan, une courbe (C) que l'on regarde depuis un point O (Figure 4.16). L'angle sous lequel on voit la courbe (C) depuis O se mesure, en radians, comme la longueur l de l'arc découpé par les droites OA et OB sur le cercle de centre O de rayon $R = 1$: c'est la *définition* du radian. Dans l'espace, considérons de même une surface (Σ) que l'on regarde depuis O (Figure 4.17). L'*angle solide* sous lequel on la voit est, *par définition*, la surface découpée par le cône s'appuyant sur (Σ) sur la sphère de centre O de rayon $R = 1$. L'unité d'angle solide est le *stéradian* (symbole : sr). Ainsi l'angle solide sous lequel on voit tout l'espace depuis le point O vaut 4π sr (surface de la sphère de centre O de rayon 1), de même que l'angle sous lequel on voit tout le plan depuis O vaut 2π rad (longueur du cercle de centre O de rayon 1).

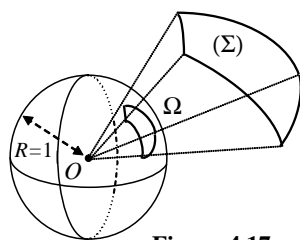


Figure 4.17

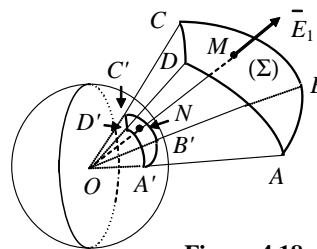


Figure 4.18

On doit à Carl Friedrich Gauss (1777-1855) d'avoir généralisé cette définition élémentaire, en vue du calcul du flux d'un champ newtonien à travers une surface donnée, de la façon suivante : Soit O un point de l'espace.

L'angle solide Ω sous lequel on voit, depuis O , une surface orientée (Σ) de l'espace est, par définition, le flux du champ newtonien unité

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

à travers la surface orientée (Σ) , c'est-à-dire

$$\Omega = \iint_{\Sigma} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{n} \cdot d\sigma \quad (4.17)$$

Ainsi, le flux du champ newtonien $\vec{E} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r$ à travers (Σ) vaut $\phi = k\Omega$.

Montrons que la formule (4.17) généralise la définition géométrique lorsque la droite OM coupe (Σ) en un seul point M pour tout point M de (Σ) (Figure 4.18). La surface fermée $ABCD A' B' C' D'$ est alors un tube de champ pour le champ newtonien $\vec{E}_1 = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$, puisque le champ est tangent à chacune des surfaces latérales $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ et $DAA'D'$. Le champ newtonien étant à flux conservatif (Exemple 4.15), le flux entrant est égal au flux sortant, qui est, par (4.17), l'angle solide Ω . En notant S la surface $A'B'C'D'$ sur la sphère de centre O de rayon 1, nous avons donc

$$\Omega = \iint_S \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \iint_S d\sigma = S,$$

puisque au point N situé à la surface de la sphère, on a $r = 1$ et $\vec{e}_r = \vec{n}$. L'angle solide défini par Gauss comme le flux d'un champ newtonien généralise bien la définition géométrique.

Théorème 4.4 L'angle solide sous lequel on voit une surface fermée (Σ) depuis un point O de l'espace vaut 4π si le point M est intérieur à (Σ) , et 0 si le point O est extérieur à (Σ) .

Démonstration Si on regarde (Σ) depuis un point intérieur, on est complètement entouré par elle. L'angle solide correspond donc à tout l'espace, c'est-à-dire 4π sr. Si on regarde la surface depuis un point extérieur, le flux de \vec{E}_1 à travers (Σ) est nul, car \vec{E}_1 est à flux conservatif dans (Σ) .

Exercices

Les basiques

Exercice 4.1 (A) Calculer $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}$, où $\vec{E} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r$ est un champ newtonien.

Exercice 4.2 (A) Démontrer que $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} U) = \vec{0}$ et $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = 0$.

Exercice 4.3 (A) Soit $\lambda = \lambda(M)$ une fonction scalaire, $\vec{E} = \vec{E}(M)$ et $\vec{F} = \vec{F}(M)$ des champs de vecteurs. Démontrer les formules suivantes :

- 1) $\text{div}(\lambda \vec{E}) = \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \lambda + \lambda \text{div} \vec{E}$.
- 2) $\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}$.

Exercice 4.4 (A) Transformer $\vec{u} = \overrightarrow{\text{rot}}(\lambda \vec{E})$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})$.

Exercice 4.5 (A) Soit \vec{w} un vecteur constant, et soit $\vec{V} = \vec{w} \wedge \overrightarrow{OM}$. Démontrer que $\vec{w} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$.

Exercice 4.6 (B) Soit $R > 0$ fixé. Calculer l'intégrale de surface

$$I = \iint_S f(M) d\sigma,$$

où $f(M) = f(x, y, z) = \sqrt{z}$ et S est la demi-sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$,

Exercice 4.7 (B) Soit $R > 0$ et $a > 0$ et soit S le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leq z \leq a$. Calculer l'intégrale de surface

$$I = \iint_S f(M) d\sigma, \quad \text{où } f(M) = f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}.$$

Exercice 4.8 (C) Soit $R > 0$ et $h > 0$. Soit la portion Σ de cylindre d'équation

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad 0 \leq z \leq h, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Déterminer le flux du champ de vecteurs $\vec{E} = z\vec{i} + x\vec{j} - 3y^2z\vec{k}$ à travers Σ (on précisera l'orientation de Σ choisie).

Exercice 4.9 (A,C,E) Soit $R > 0$, et soit S la demi-sphère d'équation

$$z \geq 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Soit le champ de vecteurs

$$\vec{E} = y\vec{i} + x(1-2z)\vec{j} - xy\vec{k}.$$

- 1) Calculer $\text{rot } \vec{E}$. En déduire le flux de $\text{rot } \vec{E}$ à travers S (on précisera l'orientation choisie).
- 2) Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Stokes.
- 3) Retrouver ce résultat en fermant la surface S par le disque de centre O de rayon R situé dans le plan Oxy , et en utilisant la formule d'Ostrogradski.

Exercice 4.10 (C,D,E) Soit $R > 0$ donné, et soit S la demi-sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0.$$

En utilisant la formule d'Ostrogradski, trouver le flux du champ constant $\vec{E} = E\vec{k}$ à travers S (on précisera l'orientation de S choisie).

Exercice 4.11 (C,D,F) Soit $R > 0$ et $a > 0$. Soit D le disque de la figure 4.19, centré sur Oy et perpendiculaire à Oy .

- 1) Calculer l'angle solide sous lequel on voit ce disque depuis le point O .
- 2) Calculer le flux du champ newtonien

$$\vec{E} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r$$

à travers D , orienté dans le sens des y croissants.

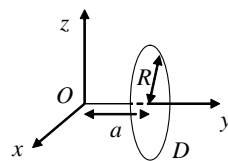


Figure 4.19

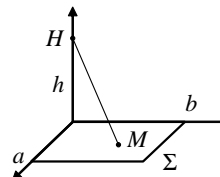


Figure 4.20

Les techniques

Exercice 4.12 On se propose de calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{E} = xy^2\vec{i}$ à travers la surface de la sphère (S) de centre O de rayon R orientée vers l'extérieur, de deux manières différentes.

- 1) *Calcul direct.*
 - a) Calculer les intégrales $I = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi$ et $J = \int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta$.
 - b) Calculer $\vec{E} \cdot \vec{n}$, puis le flux ϕ du champ \vec{E} à travers (S).
- 2) *Calcul par la formule d'Ostrogradski.* Calculer $\text{div } \vec{E}$, en déduire ϕ .

Exercice 4.13 Déterminer le moment d'inertie d'une sphère creuse homogène, de rayon R , de masse totale \mathcal{M} , de masse surfacique μ , par rapport à un axe (Δ) passant par son centre.

Les exotiques et les olympiques

Exercice 4.14 Soit Σ le rectangle $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ (Figure 4.20). Soit $H(0,0,h)$, avec $h > 0$.

- 1) Calculer $\frac{\partial}{\partial y} \left[y(h^2 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \right]$.
- 2) Montrer que l'angle solide Ω suivant lequel on voit Σ du point H vaut

$$\Omega = hb \int_{x=0}^{x=a} \frac{dx}{(h^2 + x^2) \sqrt{h^2 + b^2 + x^2}}.$$

- 3) Calculer Ω grâce au changement de variable $x = \sqrt{h^2 + b^2} \tan t$.

Solutions des exercices

Solutions des exercices du chapitre 1

Exercice 1.1 Démontrons les formules dans le cas de fonctions de deux variables.

$$\begin{aligned} d(U+V) &= \frac{\partial(U+V)}{\partial x} dx + \frac{\partial(U+V)}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dy \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy\right) = dU + dV. \end{aligned}$$

Pour le produit :

$$\begin{aligned} d(UV) &= \frac{\partial(UV)}{\partial x} dx + \frac{\partial(UV)}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial U}{\partial x} V + U \frac{\partial V}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} V + U \frac{\partial V}{\partial y}\right) dy \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy\right) V + U \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy\right) = VdU + UdV. \end{aligned}$$

Pour le quotient :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{U}{V}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U}{V}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U}{V}\right) dy = \frac{V \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial V}{\partial x}}{V^2} dx + \frac{V \frac{\partial U}{\partial y} - U \frac{\partial V}{\partial y}}{V^2} dy \\ &= \frac{V \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy\right) - U \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy\right)}{V^2} = \frac{VdU - UdV}{V^2}. \end{aligned}$$

Exercice 1.2 Dans le cas d'une fonction de deux variables par exemple :

$$d(\ln|U|) = \frac{\partial(\ln|U|)}{\partial x} dx + \frac{\partial(\ln|U|)}{\partial y} dy = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{U} dx + \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{U} dy = \frac{\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy}{U} = \frac{dU}{U}.$$

C'est la formule (23.7). La formule (1.8) s'obtient grâce au résultat sur la différentielle de UV , en divisant par UV :

$$d(UV) = UdV + VdU \Rightarrow \frac{d(UV)}{UV} = \frac{dV}{V} + \frac{dU}{U}.$$

On peut aussi utiliser (23.7) et la formule qui donne la différentielle de $U+V$:

$$\frac{d(UV)}{UV} = d(\ln|UV|) = d(\ln|U| + \ln|V|) = d(\ln|U|) + d(\ln|V|) = \frac{dU}{U} + \frac{dV}{V}.$$

Exercice 1.3 1) Dans le cas de petits accroissements Δx et Δy , la différentielle $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ fournit la *formule d'approximation* : $\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$.

Ici on a $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$. Donc au point $x = 1, y = 2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{2}{25} = -0,08 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = -\frac{4}{25} = -0,16.$$

Donc l'accroissement de f correspondant à $\Delta x = 0,003$ et $\Delta y = -0,001$ vaut approximativement

$$\Delta f \approx -0,08 \times 0,003 + 0,16 \times 0,001 \approx -8.10^{-5}.$$

2) Une calculatrice donne numériquement $\Delta f = \frac{1}{1,003^2+1,999^2} - \frac{1}{1^2+2^2} \approx -8.03677.10^{-5}$.

L'accroissement calculé grâce à la différentielle est proche de la valeur exacte.

Exercice 1.4 Différentions l'équation cartésienne du folium de Descartes :

$$d(x^3 + y^3) = d(3xy) \Rightarrow \frac{\partial(x^3+y^3)}{\partial x} dx + \frac{\partial(x^3+y^3)}{\partial y} dy = \frac{\partial(3xy)}{\partial x} dx + \frac{\partial(3xy)}{\partial y} dy.$$

On obtient donc $3x^2 dx + 3y^2 dy = 3y dx + 3x dy$. Or le coefficient directeur de la tangente vaut $\frac{dy}{dx}$, donc

$$(y^2 - x) dy = (y - x^2) dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y-x^2}{y^2-x} \text{ (si } x \neq y^2\text{)}.$$

Exercice 1.5 1) Par définition, $\overrightarrow{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$. Ici on a

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}; \frac{\partial U}{\partial y} = 3y(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}; \frac{\partial U}{\partial z} = 3z(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}} U = 3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$.

2) En coordonnées sphériques (r, θ, φ) , on a $U = (r^2)^{\frac{3}{2}} = r^3$. Utilisons l'expression du gradient en coordonnées sphériques (Formule (1.23)) : $\overrightarrow{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$.

Puisque U ne dépend ni de θ ni de φ , on a $\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$. En outre $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{dU}{dr} = 3r^2$. Il en résulte que $\overrightarrow{\text{grad}} U = 3r^2 \vec{e}_r$.

3) On sait que $(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = \|\overrightarrow{OM}\|$. Donc $U = \|\overrightarrow{OM}\|^3$. Ceci est l'expression *intrinsèque* de U : elle ne dépend pas du système de coordonnées choisi. De même, en partant des coordonnées cartésiennes et en utilisant le résultat de la question 1, il vient $\overrightarrow{\text{grad}} U = 3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 3\|\overrightarrow{OM}\| \cdot \overrightarrow{OM}$.

On retrouve cette expression en partant des coordonnées sphériques (question 2) :

$$\vec{\text{grad}} U = 3r^2 \vec{e}_r = 3 \cdot \frac{\|\vec{OM}\|^2}{\|\vec{OM}\|} \cdot \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} = 3 \|\vec{OM}\| \cdot \vec{OM}.$$

Exercice 1.6 Comme pour le calcul du gradient en coordonnées cylindriques, on utilise l'expression intrinsèque de la différentielle $dU = \vec{\text{grad}}U \cdot d\vec{M}$. On calcule d'abord les composantes de $d\vec{M}$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Celles-ci s'obtiennent en faisant varier r de dr (θ et φ fixés), θ de $d\theta$ (r et φ fixés), φ de $d\varphi$ (r et θ fixés), de manière indépendante. On voit (Figure 1.11) que $d\vec{M}_{\theta, \varphi} = dr \vec{e}_r$, $d\vec{M}_{r, \varphi} = r d\theta \vec{e}_\theta$, $d\vec{M}_{r, \theta} = r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$.

Or $d\vec{M} = d\vec{M}_{\theta, \varphi} + d\vec{M}_{r, \varphi} + d\vec{M}_{r, \theta}$. Par conséquent $d\vec{M} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$.

Notons $\vec{\text{grad}}U = a \vec{e}_r + b \vec{e}_\theta + c \vec{e}_\varphi$, où a, b, c sont inconnus. On traduit l'expression intrinsèque de dU dans la base orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:

$$dU = \vec{\text{grad}}U \cdot d\vec{M} = (a \vec{e}_r + b \vec{e}_\theta + c \vec{e}_\varphi) \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi) = adr + brd\theta + cr \sin \theta d\varphi.$$

Or on a aussi $dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi$. On obtient donc par identification $\frac{\partial U}{\partial r} = a$, $\frac{\partial U}{\partial \theta} = br$, $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = cr \sin \theta$.

D'où le gradient en sphériques : $\vec{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$.

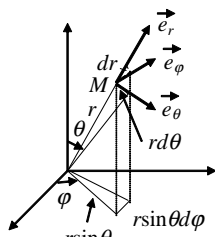


Figure 1.11

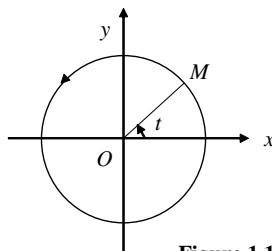


Figure 1.12

Exercice 1.7 1) La circulation le long de $(\vec{\Gamma})$ vaut $W(\vec{\Gamma}) = \int_{\vec{\Gamma}} \vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_{\vec{\Gamma}} x^2 y dx + xy dy$.

L'équation de $(\vec{\Gamma})$ est $y = x^2$, donc on prend x comme variable d'intégration. Lorsque M se déplace sur $(\vec{\Gamma})$, on a $dy = 2x dx$, donc $W(\vec{\Gamma}) = \int_{x=0}^{x=1} x^2 \cdot x^2 dx + x \cdot x^2 \cdot 2x dx = \int_0^1 3x^4 dx = \frac{3}{5}$.

2) La circulation le long de (\vec{C}) se décompose en deux :

$$W(\vec{C}) = \int_{\vec{C}} x^2 y dx + xy dy = \int_{\vec{OB}} x^2 y dx + xy dy + \int_{\vec{BA}} x^2 y dx + xy dy.$$

Le long du segment OB , on a $y = 0$, donc $dy = 0$, et x varie de 0 à 1.

Le long du segment BA , on a $x = 1$, donc $dx = 0$, et y varie de 0 à 1.

Par conséquent $W(\vec{C}) = \int_{x=0}^{x=1} 0 dx + \int_{y=0}^{y=1} y dy = [\frac{1}{2} y^2]_0^1 = \frac{1}{2}$.

3) La circulation de \vec{E} entre O et A dépendant du chemin suivi, le champ \vec{E} ne dérive pas d'un potentiel scalaire.

Exercice 1.8 On cherche U telle que $\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 y + y^3$ (1), $\frac{\partial U}{\partial y} = x^3 + 3xy^2$ (2), $\frac{\partial U}{\partial z} = 6z$ (3).

En intégrant (1) par rapport à x , il vient $U = x^3 y + y^3 x + f(y, z)$ (4).

On dérive par rapport à y et on reporte dans (2). On obtient $\frac{\partial U}{\partial y} = x^3 + 3y^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 3xy^2$.

On a donc $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, d'où $f = g(z)$ (puisque f est une fonction de y et z seulement).

En reportant dans (4), il vient $U = x^3 y + y^3 x + g(z)$ (5).

On dérive enfin par rapport à z et on reporte dans (3), pour obtenir $\frac{\partial U}{\partial z} = g'(z) = 6z \Rightarrow g(z) = 3z^2 + C$.

En reportant dans (5), on obtient finalement $U = x^3 y + y^3 x + 3z^2 + C$.

2) On a donc, d'après le calcul précédent : $\vec{E} = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = \vec{\text{grad}}U$.

Ainsi U dérive du potentiel scalaire $V = -U = -x^3 y - y^3 x - 3z^2 - C$.

Puisqu'on veut $V(0, 0, 0) = 0$, on a $C = 0$, donc $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$, $V = -x^3 y - y^3 x - 3z^2$.

3) Puisque \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire, cette circulation est égale à la différence de potentiel entre A et B .

Donc $W(A \rightarrow B) = V(A) - V(B) = -3 - (-17) = 14$.

Exercice 1.9 Puisque $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$, on cherche U vérifiant

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 - 6xy - 6xz \quad (1), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 \quad (2), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 3z^2 - 3x^2 \quad (3).$$

En intégrant (1) par rapport à x , il vient $U = x^3 - 3x^2 y - 3x^2 z + f(y, z)$ (4)

On dérive par rapport à y et on reporte dans (2) : $\frac{\partial U}{\partial y} = -3x^2 + \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2$.

On a donc $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$, d'où $f = y^3 + g(z)$ (puisque f est une fonction de y et z seulement). En reportant dans (4), il vient $U = x^3 - 3x^2 y - 3x^2 z + y^3 + g(z)$ (5). On dérive par rapport à z et on reporte dans (3) :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -3x^2 + g'(z) = 3z^2 - 3x^2 \Rightarrow g'(z) = 3z^2 \Rightarrow g(z) = z^3 + C.$$

En reportant dans (5), on obtient finalement $U = x^3 + y^3 + z^3 - 3x^2 y - 3x^2 z + C$.

Ainsi δW est une différentielle exacte, car il existe une fonction U telle que $\delta W = dU$.

Exercice 1.10 Puisque $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$, on cherche U vérifiant $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x^2-y}{x^2}$ (1), $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x+1}{x}$ (2).

Il est plus facile de commencer par intégrer (2) par rapport à y . On obtient ainsi $U = \frac{x+1}{x}y + f(x)$ (4).

On dérive par rapport à x et on reporte dans (1). Il vient $\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}y + f'(x) = \frac{x^2-y}{x^2} = 1 - \frac{y}{x^2}$.

On a donc $f' = 1$, d'où $f = x + C$. En reportant dans (4), il vient $U = \frac{x+1}{x}y + x + C$.

δW est une différentielle exacte car existe une fonction U telle que $\delta W = dU$.

Exercice 1.11 La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées. Pour les produits, on utilise la formule habituelle $(uv)' = u'v + uv'$, en tenant compte de la variable par rapport à laquelle on dérive.

1) Par définition du gradient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(U_1 + U_2) &= \frac{\partial}{\partial x}(U_1 + U_2) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(U_1 + U_2) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(U_1 + U_2) \vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial x}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\partial U_2}{\partial z}\right) \vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U_1}{\partial z} \vec{k}\right) + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U_2}{\partial z} \vec{k}\right). \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}}(U_1 + U_2) = \overrightarrow{\text{grad}} U_1 + \overrightarrow{\text{grad}} U_2$.

2) Par définition du gradient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(U_1 U_2) &= \frac{\partial}{\partial x}(U_1 U_2) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(U_1 U_2) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(U_1 U_2) \vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} U_2 + U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} U_2 + U_1 \frac{\partial U_2}{\partial y}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} U_2 + U_1 \frac{\partial U_2}{\partial z}\right) \vec{k} \\ &= U_2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U_1}{\partial z} \vec{k}\right) + U_1 \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U_2}{\partial z} \vec{k}\right). \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}}(U_1 U_2) = U_1 \overrightarrow{\text{grad}} U_2 + U_2 \overrightarrow{\text{grad}} U_1$.

Remarque : Ces deux formules peuvent s'obtenir également en utilisant l'expression intrinsèque de la différentielle.

Pour le gradient d'un produit, par exemple, on sait que $d(UV) = VdU + UdV$, donc pour tout accroissement \overrightarrow{dM}

$$\overrightarrow{\text{grad}}(UV) \cdot \overrightarrow{dM} = V \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \overrightarrow{dM} + U \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \overrightarrow{dM} = (V \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U + U \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V) \cdot \overrightarrow{dM},$$

ce qui entraîne que $\overrightarrow{\text{grad}}(UV) = V \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U + U \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V$.

Exercice 1.12 On cherche V tel que $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, c'est-à-dire $-kx \vec{i} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$.

On a $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$, donc V ne dépend que de x . Ensuite $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dx} = kx$, donc $V = \frac{1}{2}kx^2 + C$. On choisit C de telle sorte que le potentiel soit nul lorsque le ressort est dans sa position d'équilibre, c'est-à-dire pour $x = 0$.

On a donc $C = 0$ et la force de rappel d'un ressort $\overrightarrow{F} = -kx \vec{i}$ est conservative, de potentiel $V = \frac{1}{2}kx^2$.

Exercice 1.13 Différentions les deux relations. Nous obtenons $ydx + xdy = 0$ et $2ydy - 2xdx = 2dt$. Si nous divisons tout par dt , il vient $y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} = 0$ et $-x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 1$. On a donc un système de deux équations à deux inconnues. En utilisant les formules de Cramer, on obtient immédiatement :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & x \\ -x & y \end{vmatrix}} = \frac{-x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} y & 0 \\ -x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & x \\ -x & y \end{vmatrix}} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

En appliquant les formules de dérivation d'un quotient, il vient ensuite :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-\frac{dx}{dt}(x^2 + y^2) + x(2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt})}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x + 2x \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Un calcul analogue conduit à $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$.

Exercice 1.14 1) Puisque les différentielles dU et dS sont exprimées en fonction de dT et dV , cela signifie qu'on a choisi T et v comme variables indépendantes (p étant alors une fonction de T et v puisque p, v, T sont liées).

2) Comme dU et dV sont des différentielles exactes, les dérivées partielles croisées sont égales, et on a par (1.26)

$$\frac{\partial C}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial T}(l - p) \text{ et } \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{C}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{l}{T}\right).$$

En tenant compte du fait que T et v sont indépendantes, ceci s'écrit :

$$\frac{\partial C}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T}, \quad \frac{1}{T} \frac{\partial C}{\partial v} = \frac{1}{T} \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{l}{T^2}.$$

On multiplie la deuxième équation par T et on la soustrait à la première. On obtient $0 = -\frac{\partial p}{\partial T} + \frac{l}{T}$, d'où $l = T \frac{\partial p}{\partial T}$.

Exercice 1.15 1) Cette forme différentielle est définie dans le plan \mathbb{R}^2 privé de l'origine O , puisque $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0$.

2) Ce cercle est paramétré par $x = \cos t, y = \sin t$, où t varie de 0 à 2π (Figure 1.12). On a donc $dx = -\sin t dt, dy = \cos t dt$, et l'intégrale curviligne s'écrit :

$$I = \int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_{t=0}^{t=2\pi} \frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \sin t dt + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} dt = 2\pi.$$

3) δW ne dérive pas d'un potentiel scalaire dans le plan privé de l'origine O .

En effet, si c'était le cas, sa circulation le long de la courbe fermée (\overrightarrow{C}) serait nulle.

4) Vérifions que les dérivées partielles croisées sont égales :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{-(x^2+y^2)+y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{(x^2+y^2)-x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Par conséquent, on voit que, si $\delta W = Pdx + Qdy$ est une différentielle exacte, alors $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Mais la réciproque est fautive. Dans cet exercice, l'égalité $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ est vérifiée dans $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, mais δW n'est pas une différentielle exacte. Ceci est dû au fait que $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ est "troué", et que la courbe fermée choisie entoure le trou O .

Solutions des exercices du chapitre 2

Exercice 2.1 Le domaine \mathcal{D} est représenté figure 2.14. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=y_{\min}(x)}^{y=y_{\max}(x)} x^2 y dx dy = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1-x} x^2 y dx dy \\ &= \int_{x=0}^{x=1} x^2 \left(\int_{y=0}^{y=1-x} y dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} x^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} x^2 (1-x)^2 dx. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } I = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{60}.$$

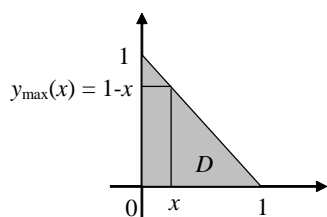


Figure 2.14

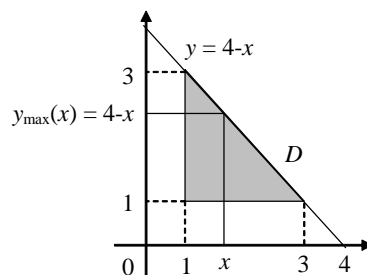


Figure 2.15

Exercice 2.2 Le domaine \mathcal{D} est représenté figure 2.15. On voit que $x_{\min} = 1$ et $x_{\max} = 3$. Donc

$$I = \int_{x=1}^{x=3} \int_{y=y_{\min}(x)}^{y=y_{\max}(x)} \frac{dx dy}{(x+y)^2} = \int_{x=1}^{x=3} \left(\int_{y=1}^{y=4-x} \frac{dy}{(x+y)^2} \right) dx = \int_{x=1}^{x=3} \left[\frac{-1}{x+y} \right]_{y=1}^{y=4-x} dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4} \right) dx.$$

$$\text{Par suite } I = \left[\ln|x+1| - \frac{x}{4} \right]_1^3 = \left(\ln 4 - \frac{3}{4} \right) - \left(\ln 2 - \frac{1}{4} \right) = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Exercice 2.3 Le domaine \mathcal{D} est limité par la droite d'équation $y = x$ et la parabole d'équation $y = x^2$ (Figure 2.16). On voit que $x_{\min} = 0$ et $x_{\max} = 1$. Donc

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=y_{\min}(x)}^{y=y_{\max}(x)} \sqrt{x} dx dy = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{x} \left(\int_{y=x^2}^{y=x} dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{x} [y]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 \sqrt{x} (x - x^2) dx.$$

On développe et on utilise les puissances rationnelles, pour obtenir

$$I = \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{2}} \right) dx = \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{2}{7} = \frac{4}{35}.$$

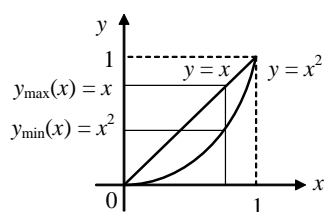


Figure 2.16

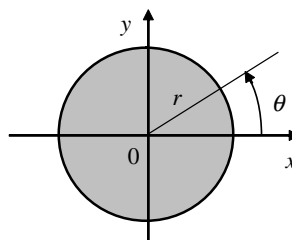


Figure 2.17

Exercice 2.4 \mathcal{D} est le disque de centre O de rayon 1 (Figure 2.17). Ainsi θ varie de 0 à 2π , et, pour θ fixé, r varie entre $r_{\min}(\theta) = 0$ et $r_{\max}(\theta) = 1$, d'où $I = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=r_{\min}(\theta)}^{r=r_{\max}(\theta)} \frac{r dr d\theta}{1+r^2} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=1} \frac{r dr}{1+r^2} \right) d\theta$.

Puisque l'intégrale entre parenthèses ne dépend pas de θ , c'est une constante qui vient en facteur de l'intégrale par rapport à θ (intégration sur un pavé). On obtient ainsi

$$I = \int_{r=0}^{r=1} \frac{r dr}{1+r^2} \times \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = \left[\frac{1}{2} \ln|1+r^2| \right]_0^1 \times [\theta]_0^{2\pi} = \pi \ln 2.$$

Exercice 2.5 Le domaine \mathcal{D} est le huitième de disque de centre O de rayon R situé entre les droites $y = 0$ et $y = x$ (Figure 2.18). Donc θ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$, et, pour θ fixé, r varie entre $r_{\min}(\theta) = 0$ et $r_{\max}(\theta) = R$ et

$$I = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \int_{r=r_{\min}(\theta)}^{r=r_{\max}(\theta)} (r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{r=R} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) r^3 dr d\theta.$$

Or on sait que $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$. Par conséquent

$$I = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \left(\int_{r=0}^{r=R} \cos 2\theta \cdot r^3 dr \right) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \left(\int_{r=0}^{r=R} r^3 dr \right) d\theta.$$

Comme dans l'exercice 2.4, l'intégrale entre parenthèses ne dépend pas de θ , c'est une constante qui vient en facteur de l'intégrale par rapport à θ (intégration sur un pavé).

On obtient $I = \int_{r=0}^{r=R} r^3 dr \times \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R \times \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}R^4$.

- Exercice 2.6** 1) Il s'agit du cercle de centre $\Omega(1, 0)$ et de rayon $R = 1$.
 2) L'équation développée s'écrit $x^2 + y^2 - 2x = 0$. En remplaçant x et y par $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ on obtient $r^2 - 2r \cos \theta = 0$, d'où l'équation polaire de (C) : $r = 2 \cos \theta$.
 3) L'inégalité $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ équivaut à $\|\vec{\Omega M}\| \leq 1$.

Ainsi le domaine d'intégration est l'intérieur de (C) , limité aux $y \geq 0$ (Figure 2.19). On a donc

$$I = \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-(x-1)^2}} y dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=2} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{\sqrt{2x-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=2} (2x - x^2) dx = \frac{1}{2} \left[x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

- 4) Pour θ fixé, on a $r_{\max}(\theta) = OM = 2 \cos \theta$ (Figure 2.19). Donc

$$I = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=0}^{r=2 \cos \theta} r^2 \sin \theta dr \right) d\theta = \frac{8}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \frac{8}{3} \left[-\frac{1}{4} \cos^4 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

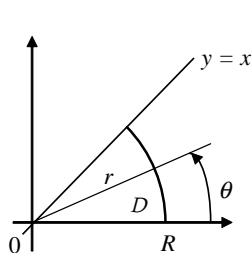


Figure 2.18

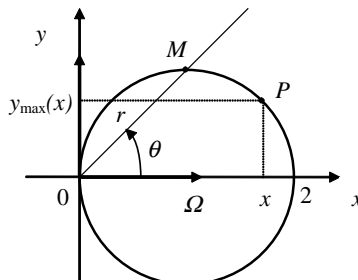


Figure 2.19

Exercice 2.7 On a $x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$. Donc \mathcal{D} est l'intérieur du cercle de centre $\Omega(0, 1)$ de rayon 1 (Figure 2.19). Pour décrire le domaine \mathcal{D} , θ varie entre 0 et π , et pour une valeur donnée de θ , r varie entre $r_{\min}(\theta) = 0$ et $r_{\max}(\theta) = OP$ (Figure 2.19). L'équation polaire du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2y = 0$ s'écrit $r^2 - 2r \sin \theta = 0$, donc $r_{\max}(\theta) = OP = 2 \sin \theta$. Donc $J = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\int_{r=0}^{r=2 \sin \theta} r^3 dr \right) d\theta = 4 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^4 \theta d\theta$.

Pour calculer cette intégrale, on linéarise

$$\sin^4 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{16} [e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} - 4(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 6] = \frac{1}{8} (\cos 4\theta - 4 \cos 2\theta + 3)$$

On obtient donc $J = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \sin 4\theta - 2 \sin 2\theta + 3\theta \right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2}$.

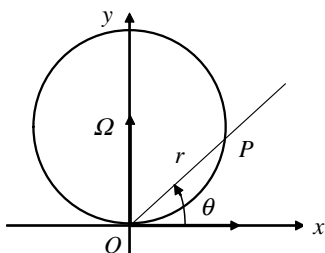


Figure 2.20

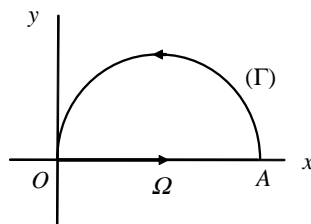


Figure 2.21

Exercice 2.8 On cherche d'abord P et Q tels que $\iint_{\mathcal{D}} y dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$.

Il y a plusieurs façons de procéder. Par exemple, prenons $Q = xy$ et $P = 0$. En appliquant la formule de Green-Riemann, il vient $I = \iint_{\mathcal{D}} y dx dy = \oint_{(\Gamma)} xy dy$, où (Γ) est la courbe entourant \mathcal{D} , parcourue dans le sens trigonométrique (Figure 2.21). En notant (\vec{C}) le demi-cercle parcouru dans le sens indiqué, il vient $I = \int_{(\vec{C})} xy dy + \int_{(\vec{OA})} xy dy$.

Or sur (\vec{OA}) on a $dy = 0$ car y reste constant (égal à 0).

Par ailleurs une représentation paramétrique de (\vec{C}) est $x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$, lorsque t varie entre 0 et π . Alors $dy = \cos t dt$, et par conséquent

$$I = \int_{t=0}^{t=\pi} (1 + \cos t) \sin t \cos t dt = \int_{t=0}^{t=\pi} (\sin t \cos t + \sin t \cos^2 t) dt = \left[-\frac{1}{2} \cos^2 t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

Exercice 2.9 Le domaine d'intégration est l'intérieur d'une ellipse (E) centrée en O , de grand axe horizontal. Une représentation paramétrique de cette ellipse parcourue dans le sens trigonométrique est $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, pour t variant entre 0 et 2π . On observe que $J = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$, avec $Q = \frac{xy^2}{b^2}$ et $P = -\frac{x^2 y}{a^2}$. En appliquant la formule de Green-Riemann, on obtient

$$J = \frac{1}{3} \oint_{(\Gamma)} -\frac{x^2 y}{a^2} dx + \frac{xy^2}{b^2} dy = 2ab \int_{t=0}^{t=2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt.$$

Or $\sin^2 t \cos^2 t = \frac{1}{4} (2 \sin t \cos t)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2t$. Donc $J = \frac{ab}{2} \int_{t=0}^{t=2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{ab}{4} \int_{t=0}^{t=2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \frac{\pi}{2} ab$.

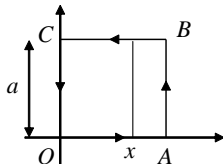


Figure 2.22

Exercice 2.10 Le domaine d'intégration est l'intérieur du carré $OABC$ (Figure 2.22).

1) En coordonnées cartésiennes, on intègre donc sur un pavé :

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{x=a} x \left(\int_{y=0}^{y=a} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=a} x \left[\sqrt{x^2 + y^2 + a^2} \right]_{y=0}^{y=a} dx \\ &= \int_0^a \left(x(x^2 + 2a^2)^{\frac{1}{2}} - x(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{1}{3} \left[(x^2 + 2a^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3} \left[(3a^2)^{\frac{3}{2}} - (2a^2)^{\frac{3}{2}} - (2a^2)^{\frac{3}{2}} + (a^2)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{1}{3} a^3 (3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

2) Pour utiliser la formule de Green-Riemann, prenons $Q = y\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$ et $P = 0$.

Le contour (\vec{C}) est la réunion de quatre segments (Figure 2.22).

La formule de Green-Riemann s'écrit : $I = \int_{\vec{OA}} Q dy + \int_{\vec{AB}} Q dy + \int_{\vec{BC}} Q dy + \int_{\vec{CA}} Q dy$.

La première et la troisième intégrales sont nulles car $dy = 0$.

Sur \vec{AB} , on a $x = a$, donc $Q = y\sqrt{y^2 + 2a^2}$. De même, sur \vec{CO} , $Q = y\sqrt{y^2 + a^2}$. Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_{\vec{AB}} Q dy + \int_{\vec{CA}} Q dy = \int_{y=0}^{y=a} y\sqrt{y^2 + 2a^2} dy + \int_{y=a}^{y=0} y\sqrt{y^2 + a^2} dy \\ &= \left[\frac{1}{3} (y^2 + 2a^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a + \left[\frac{1}{3} (y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} \right]_a^0 = \frac{1}{3} a^3 (3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

Exercice 2.11 Le domaine d'intégration étant un disque centré en O , on travaille en coordonnées polaires dans le plan Oxy . Soient (r, θ) les coordonnées polaires de P . Alors $d\sigma = r dr d\theta$.

De plus $\vec{PM} \cdot \vec{k} = (\vec{PO} + \vec{OM}) \cdot \vec{k} = \vec{PO} \cdot \vec{k} + \vec{OM} \cdot \vec{k} = \vec{OM} \cdot \vec{k}$ car \vec{PO} et \vec{k} sont orthogonaux.

Donc $\vec{PM} \cdot \vec{k} = h \vec{k} \cdot \vec{k} = h \vec{k} \cdot \vec{k} = h$. D'autre part $\|PM\|^3 = (PM^2)^{\frac{3}{2}} = (OP^2 + OM^2)^{\frac{3}{2}} = (r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}$. Donc

$$E = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} \frac{hr dr d\theta}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = h \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \times \int_{r=0}^{r=R} r (r^2 + h^2)^{-\frac{3}{2}} dr = 2\pi h \left[\frac{-1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right]_0^R = 2\pi h \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right).$$

Exercice 2.12 1) Partons du membre de droite de l'égalité à démontrer.

Quand on intègre par rapport à y , l'intégrale est de la forme $\int \frac{u'}{u} dy$.

Donc, en tenant compte du fait que $1 + x > 0$, $\int_0^1 \frac{xdy}{1+xy} = [\ln |1 + xy|]_0^1 = \ln |1 + x| = \ln(1 + x)$.

2) Ainsi $J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \left(\int_0^1 \frac{xdy}{1+xy} \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=1} \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dy \right) dx$. Donc

$$J = \iint_D \frac{xdxdy}{(1+x^2)(1+xy)}, \text{ avec } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}.$$

3) Puisque le domaine D est symétrique par rapport à x et y , x est y jouent le même rôle.

On peut donc les intervertir dans J , et on obtient $J = \iint_D \frac{ydx dy}{(1+y^2)(1+xy)}$.

En additionnant les deux expressions de J obtenues, il vient

$$2J = \iint_D \left(\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)} \right) dx dy = \iint_D \frac{x(1+y^2) + y(1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} dx dy.$$

En développant le numérateur, on voit que $x(1+y^2) + y(1+x^2) = x + y + xy(x+y) = (x+y)(1+xy)$.

D'où, après simplification par $(1+xy)$, $2J = \iint_D \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy$.

4) En séparant l'intégrale en deux, il vient $2J = \iint_D \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy + \iint_D \frac{y}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy$.

D étant symétrique par rapport à x et y , les deux intégrales sont égales, donc

$$J = \iint_D \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=1} \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} dy \right) dx.$$

On intègre une fonction de la forme $f(x)g(y)$ sur un pavé, donc

$$J = \left(\int_{x=0}^{x=1} \frac{x}{1+x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{y=0}^{y=1} \frac{1}{1+y^2} dy \right) = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 \cdot [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

Solutions des exercices du chapitre 3

Exercice 3.1 Le domaine d'intégration est un tétraèdre (Figure 3.31). En utilisant la figure 3.32, on voit que

$$I = \int_{x=0}^{x=2} x \left(\iint_{D_x} dydz \right) dx = \int_{x=0}^{x=2} x \left(\int_{y=0}^{y=2-x} \left(\int_{z=0}^{z=1-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}} dz \right) dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=2} x \left(\int_{y=0}^{y=2-x} \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right) dy \right) dx.$$

Intégrons par rapport à y . On garde groupé le $1 - \frac{x}{2}$, qui est une constante :

$$I = \int_{x=0}^{x=2} x \left[\left(1 - \frac{x}{2} \right) y - \frac{1}{4} y^2 \right]_{y=0}^{y=2-x} dx = \int_{x=0}^{x=2} x \left(\frac{1}{2} (2-x)^2 - \frac{1}{4} (2-x)^2 \right) dx = \frac{1}{4} \int_0^2 x (2-x)^2 dx.$$

En développant le $(2-x)^2$, on obtient $I = \frac{1}{4} [2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4]_0^2 = \frac{1}{3}$.

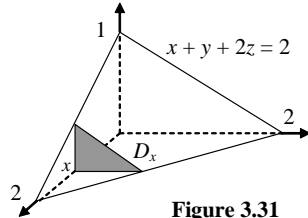


Figure 3.31

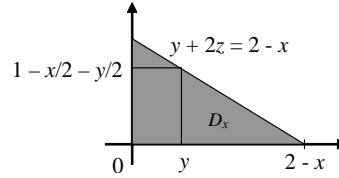


Figure 3.32

Exercice 3.2 Le domaine d'intégration est un cube (Figure 3.33). Grâce à la figure 3.34, on voit que

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \left(\iint_{D_x} \frac{1}{(x+y+z)^4} dydz \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=1}^{y=2} \left(\int_{z=1}^{z=2} (x+y+z)^{-4} dz \right) dy \right) dx.$$

En intégrant par rapport à z , il vient

$$I = -\frac{1}{3} \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=1}^{y=2} [(x+y+z)^{-3}]_{z=1}^{z=2} dy \right) dx = -\frac{1}{3} \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=1}^{y=2} [(x+y+2)^{-3} - (x+y+1)^{-3}] dy \right) dx.$$

Intégrons ensuite par rapport à y :

$$I = \frac{1}{6} \int_{x=0}^{x=1} [(x+y+2)^{-2} - (x+y+1)^{-2}]_{y=1}^{y=2} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 [(x+4)^{-2} - 2(x+3)^{-2} + (x+2)^{-2}] dx.$$

On intègre enfin par rapport à x :

$$I = -\frac{1}{6} [(x+4)^{-1} - 2(x+3)^{-1} + (x+2)^{-1}]_0^1 = -\frac{1}{6} \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{120}.$$

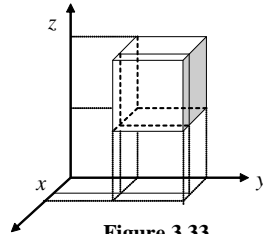


Figure 3.33

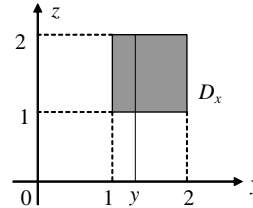


Figure 3.34

Exercice 3.3 Le domaine d'intégration est un cylindre (Figures 3.35 et 3.36).

En remplaçant $dS = dx dy dz$ par $r dr d\theta dz$, on a

$$I = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \iint_{D_\theta} z^2 r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=a} r \left(\int_{z=0}^{z=h} z^2 dz \right) dr \right) d\theta.$$

Les bornes étant indépendantes, l'intégrale se décompose en un produit de 3 intégrales simples :

$$I = \int_{z=0}^{z=h} z^2 dz \times \int_{r=0}^{r=a} r dr \times \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^h \times \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a \times [\theta]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{3} a^2 h^3.$$

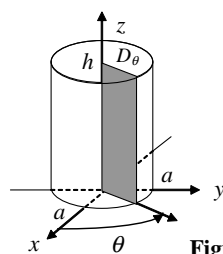


Figure 3.35

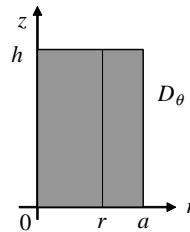


Figure 3.36

Exercice 3.4 Le domaine d'intégration est l'espace compris entre les sphères de centre O de rayons respectifs α et β , limité aux $z \geq 0$ (Figures 3.37 et 3.38).

En remplaçant $dV = dx dy dz$ par $r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ et $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ par r , il vient

$$I = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\iint_{D_\theta} \frac{1}{r} r^2 \sin \theta dr d\theta \right) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \sin \theta \left(\int_{r=\alpha}^{r=\beta} r dr \right) d\theta \right) d\varphi.$$

Les bornes étant de nouveau indépendantes, l'intégrale se décompose en un produit de 3 intégrales simples :

$$I = \int_{r=\alpha}^{r=\beta} r dr \times \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \times \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} \times [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \times [\varphi]_0^{2\pi} = \pi (\beta^2 - \alpha^2).$$

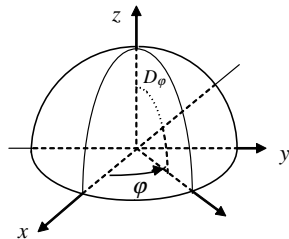


Figure 3.37

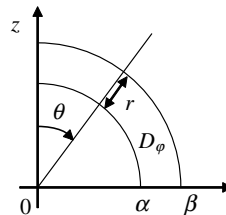


Figure 3.38

Exercice 25.5 1) Soient x, y et z les coordonnées cartésiennes de M . Alors $\|\overrightarrow{MP}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}$.

Or on sait que $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$. Par conséquent

$$\|\overrightarrow{MP}\| = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + (r \cos \theta - h)^2} = \sqrt{r^2 - 2rh \cos \theta + h^2}.$$

2) En coordonnées sphériques, il vient $I = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=0}^{r=R} \frac{r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}{\sqrt{r^2 - 2rh \cos \theta + h^2}}$ (Figures 3.39 et 3.40).

Or les bornes en r et θ sont indépendantes, et le $\sin \theta$ incite à intégrer d'abord par rapport à θ . On écrit donc

$$\begin{aligned} I &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} r^2 \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 - 2rh \cos \theta + h^2}} \right) dr \right) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} r^2 \times \frac{1}{rh} [\sqrt{r^2 - 2rh \cos \theta + h^2}]_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{h} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} r [\sqrt{r^2 + 2rh + h^2} - \sqrt{r^2 - 2rh + h^2}] dr \right) d\varphi = \frac{1}{h} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} r \left[\sqrt{(h+r)^2} - \sqrt{(h-r)^2} \right] dr \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{h} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} r [(r+h) - (h-r)] dr \right) d\varphi \text{ car } h > r \\ &= \frac{2}{h} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} r^2 dr \right) d\varphi = \frac{2}{h} \int_{r=0}^{r=R} r^2 dr \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{h}. \end{aligned}$$

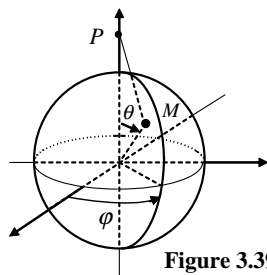


Figure 3.39

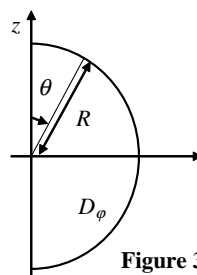


Figure 3.40

Exercice 3.6 1) En utilisant les figures 3.39 et 3.40, on a

$$V = \iiint dV = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin \theta \left(\int_{r=0}^{r=R} r^2 dr \right) d\theta \right) d\varphi = \int_{r=0}^{r=R} r^2 dr \times \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin \theta d\theta \times \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi.$$

Ainsi $V = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \times [-\cos \theta]_0^{\pi} \times 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3$ (voir aussi *Toutes les mathématiques*, page 169).

2) Choisissons un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de telle sorte que l'axe de révolution du cône soit l'axe Oz (Figure 3.41). En coordonnées cylindriques, $dV = r dr d\theta dz$, donc

$$V = \iiint dV = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} r \left(\int_{z=0}^{z=z_{\max}(r)} dz \right) dr \right) d\theta.$$

Considérons les triangles homothétiques de la figure 3.42. Alors $\frac{h - z_{\max}(r)}{h} = \frac{r}{R}$. Donc $z_{\max}(r) = h \left(1 - \frac{r}{R} \right)$ et

$$V = h \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} r \left(1 - \frac{r}{R} \right) dr \right) d\theta = h \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \times \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R} \right]_0^R = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

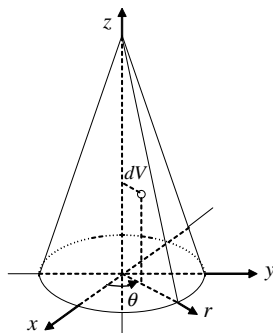


Figure 3.41

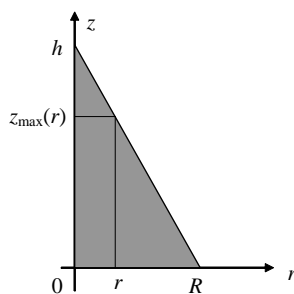


Figure 3.42

Exercice 3.7 1) Le solide est homogène et symétrique par rapport à la première bissectrice, donc son centre d'inertie appartient à la première bissectrice (Figure 3.43). On a donc $x_G = y_G$, et

$$x_G = \frac{1}{l} \int_{(F)} x dl = \frac{1}{\pi \frac{R}{2}} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} R \cos \theta \cdot R d\theta = \frac{2R}{\pi} [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}.$$

2) Lorsqu'on fait tourner le fil autour de l'axe des y , la surface de révolution engendrée est une demi-sphère de rayon R . En appliquant le premier théorème de Pappus-Guldin, il vient $S = 2\pi x_G l$, d'où $x_G = \frac{S}{2\pi l} = \frac{2\pi R^2}{2\pi \times \pi \frac{R}{2}} = \frac{2R}{\pi}$.

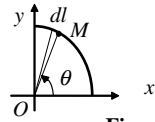


Figure 3.43

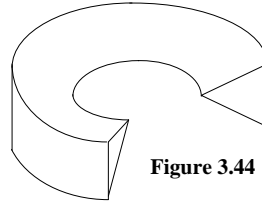


Figure 3.44

Exercice 3.8 Le solide étant homogène et symétrique par rapport à l'axe Oz (Figure 3.26), son centre d'inertie G appartient à cet axe. On calcule donc seulement z_G , en utilisant bien sûr les coordonnées sphériques :

$$z_G = \frac{1}{V} \iiint_{(\Sigma)} z dV = \frac{3}{2\pi R^3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^R r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Les bornes étant indépendantes et la fonction à intégrer se présentant sous la forme d'un produit, il vient

$$z_G = \frac{3}{2\pi R^3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \times \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \times \int_{r=0}^R r^3 dr = \frac{3}{R^3} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \frac{3}{8} R.$$

Exercice 3.9 1) Il s'agit de trouver x_G , où G est le centre d'inertie du fil ABC . Désignons par μ la masse linéique du fil. Soit $l = AC = AB = \sqrt{5}$, $l' = BC = 2$ (Figure 3.27). Soit A' le centre d'inertie du segment BC (son milieu puisque BC est homogène), et B' et C' les centres d'inertie des segments AC et AB (c'est-à-dire leurs milieux). Par le théorème d'associativité, on voit que G est le barycentre de $(A', \mu l')$, $(B', \mu l)$, $(C', \mu l)$. En simplifiant par μ , on obtient

$$x_G = \frac{l' x_{A'} + l x_{B'} + l x_{C'}}{l + 2l'} = \frac{2 \times 3 + \sqrt{5} \times 2 + \sqrt{5} \times 2}{2(1 + \sqrt{5})} = \frac{3 + 2\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}.$$

D'où $S = 2\pi x_G (l' + 2l) = 4\pi(3 + 2\sqrt{5})$ par le premier théorème de Pappus-Guldin.

2) On cherche x_Γ , où Γ est le centre d'inertie de la plaque triangulaire ABC . On sait que Γ est le centre de gravité (isobarycentre) du triangle ABC , donc $x_\Gamma = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{7}{3}$. Par ailleurs la surface σ du triangle ABC vaut $\sigma = \frac{1}{2} AA' \cdot BC = 2$, donc $V = 2\pi x_\Gamma \sigma = \frac{28}{3}\pi$.

Remarque : le solide engendré est un tore à section triangulaire (Figure 3.44).

Exercice 3.10 Entourons le point M de la barre, d'abscisse x , d'une longueur infinitésimale dx (Figure 3.45), de masse $dm = \mu dx$. Sa contribution au moment d'inertie est $dJ_\Delta = \mu x^2 dx$.

Ainsi $J_\Delta = \mu \int_{x=-l}^{x=l} x^2 dx = 2\mu \int_{x=0}^{x=l} x^2 dx = \frac{2}{3}\mu l^3$. Or $\mathcal{M} = 2l\mu$, donc $\mu = \frac{\mathcal{M}}{2l}$ et finalement $J_\Delta = \frac{1}{3}\mathcal{M}l^2$.

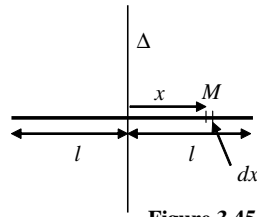


Figure 3.45

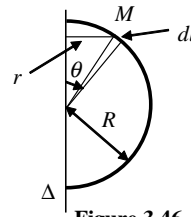


Figure 3.46

Exercice 3.11 Entourons le point M , repéré par l'angle θ (qui varie de 0 à π), d'un morceau infinitésimal de fil de longueur $dl = R d\theta$ (Figure 3.46), de masse $dm = \mu R d\theta$. Sa contribution au moment d'inertie est $dJ_\Delta = \mu R r^2 d\theta$, donc $J_\Delta = \mu R \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 d\theta$. La variable d'intégration étant θ , on exprime r en fonction de θ . On voit que $r = R \sin \theta$. Donc

$$J_\Delta = \mu R^3 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2}\mu R^3 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}\mu R^3.$$

Or $\mathcal{M} = \pi R \mu$, donc $\mu = \frac{\mathcal{M}}{\pi R}$ et par conséquent $J_\Delta = \frac{1}{2}\mathcal{M}R^2$.

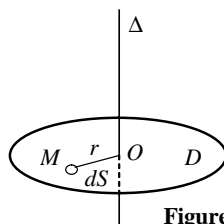


Figure 3.47

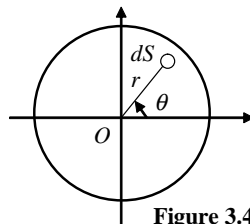


Figure 3.48

Exercice 3.12 On entoure le point M d'une surface infinitésimale dS , de masse $dm = \mu dS$ (Figure 3.47). Sa contribution au moment d'inertie est $dJ_\Delta = \mu r^2 dS$, donc $J_\Delta = \mu \iint_D r^2 dS$. On utilise les coordonnées polaires puisque le domaine d'intégration est un disque (Figure 3.48). On a $dS = r dr d\theta$, d'où

$$J_\Delta = \mu \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} r^3 dr d\theta = \mu \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=R} r^3 dr = \frac{\pi}{2} \mu R^4.$$

Or $\mathcal{M} = \pi R^2 \mu$, donc $\mu = \frac{\mathcal{M}}{\pi R^2}$ et on obtient $J_\Delta = \frac{1}{2} \mathcal{M} R^2$.

Exercice 3.13 Soit Σ le solide défini par l'intérieur de ce parallélépipède. Soit μ sa masse volumique. Choisissons un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de telle sorte que $\vec{i} = \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|}$, $\vec{j} = \frac{\vec{OB}}{\|\vec{OB}\|}$, $\vec{k} = \frac{\vec{OC}}{\|\vec{OC}\|}$ (Figure 3.49).

Par définition, le moment d'inertie du parallélépipède par rapport à (OC) vaut

$$\begin{aligned} J &= \mu \iiint_\Sigma r^2 dV = \mu \int_{x=0}^{x=a} \left(\int_{y=0}^{y=b} \left(\int_{z=0}^{z=c} (x^2 + y^2) dz \right) dy \right) dx \\ &= \mu c \int_{x=0}^{x=a} \left(\int_{y=0}^{y=b} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \mu c \int_{x=0}^{x=a} \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=b} dx \\ &= \mu bc \int_{x=0}^{x=a} \left(x^2 + \frac{1}{3} b^2 \right) dx = \frac{\mu bc}{3} [x^3 + b^2 x]_0^a = \frac{1}{3} \mu abc (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{M} = \mu abc$ la masse totale du parallélépipède. On obtient $J = \frac{1}{3} \mathcal{M} (a^2 + b^2)$.

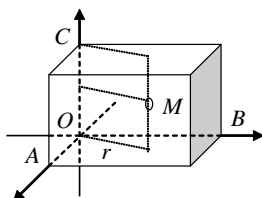


Figure 3.49

Exercice 3.14 Choisissons un repère orthonormé direct $Oxyz$ comme dans la figure 3.41. Par définition, le moment d'inertie du cône par rapport à (Oz) vaut $J = \mu \iiint_\Sigma r^2 dV$, où r est exactement le r des coordonnées cylindriques (distance du point M à l'axe Oz). En coordonnées cylindriques, on a $dV = r dr d\theta dz$, et par le même raisonnement que dans l'exercice 3.6 b, il vient

$$J = \mu \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} \left(\int_{z=0}^{z=h(1-\frac{r}{R})} r^3 dz \right) dr \right) d\theta = \mu h \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} r^3 \left(1 - \frac{r}{R} \right) dr \right) d\theta$$

L'intégrale en r ayant des bornes qui ne dépendent pas de θ , J s'écrit comme un produit de deux intégrales, et $J = \mu h \times \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \times \int_{r=0}^{r=R} \left(r^3 - \frac{r^4}{R} \right) dr = \frac{\pi}{10} \mu h R^4$. Or le volume du cône vaut $\frac{1}{3} \pi R^2 h$ (Exercice 3.6 b). Donc $\mu = \frac{3\mathcal{M}}{\pi R^2 h}$ et $J = \frac{3}{10} \mathcal{M} R^2$.

Exercice 3.15 Choisissons un repère orthonormé direct $Oxyz$ de telle sorte que (Δ) soit l'axe Oz (Figure 3.39). Par définition, le moment d'inertie de la sphère par rapport à (Oz) vaut $J = \mu \iiint_\Sigma HM^2 dV$, où H est la projection orthogonale de M sur Oz . En coordonnées sphériques, on a $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ et $HM = r \sin \theta$. Par conséquent

$$J = \mu \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^3 \theta \left(\int_{r=0}^{r=R} r^4 dr \right) d\theta \right) d\varphi = \mu \int_{r=0}^{r=R} r^4 dr \times \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^3 \theta d\theta \times \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi.$$

Or $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = [-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta]_0^\pi = \frac{4}{3}$ (Exercice 14.4 de *Toutes les mathématiques*, page 161).

Puisque la masse de la sphère vaut $\mathcal{M} = \mu \frac{4}{3} \pi R^3$, il vient finalement $J = \mu \frac{R^5}{5} \times \frac{4}{3} \times 2\pi = \frac{2}{5} \mathcal{M} R^2$.

Exercice 3.16 En utilisant les figures 3.41 et 3.42, on a, puisque $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$,

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{V} \iiint_\Sigma z dV = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} r \left(\int_{z=0}^{z=h(1-\frac{r}{R})} z dz \right) dr \right) d\theta = \frac{3h}{\pi R^2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} r \left(1 - \frac{r}{R} \right)^2 dr \right) d\theta \\ &= \frac{3h}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \times \left(\int_0^R \left(r - \frac{2}{R} r^2 + \frac{1}{R^2} r^3 \right) dr \right) = \frac{3h}{\pi R^2} \times \frac{1}{12} \pi R^2 h^2 = \frac{1}{4} h. \end{aligned}$$

Exercice 3.17 Découpez un triangle dans un feuille de carton épais. Faites un trou à un des sommets, et suspendez le triangle à un clou ou une épingle, de telle sorte qu'il puisse pivoter. Sa position d'équilibre sera atteinte lorsque son poids \vec{P} , qui s'applique à son centre d'inertie G , sera à la verticale de son point de suspension. Cette verticale peut se voir en suspendant un fil à plomb au clou (Figure 3.50). On constate expérimentalement que cette verticale est la médiane, ce qui confirme le calcul de l'exemple 3.5.

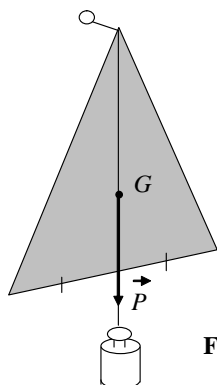


Figure 3.50

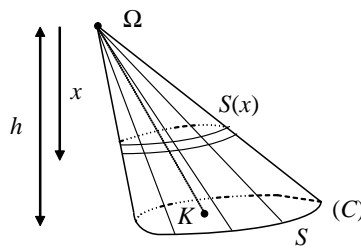


Figure 3.51

Exercice 3.18 1) Lorsque la base du cône est un triangle, le cône est un tétraèdre (Figure 3.52). Lorsque la base du cône est un quadrilatère, c'est une pyramide (Figure 3.53). Lorsque la base du cône est un cercle, c'est un cône circulaire (Figure 3.54).

2) Découpons le cône en tranches infinitésimales d'épaisseur dx (Figure 3.51). Soit $S(x)$ la surface de cette tranche. Le volume intérieur du cône vaut $V = \int_{x=0}^{x=h} S(x) dx$. Or la tranche $S(x)$ s'obtient à partir de la surface de base S par l'homothétie de centre Ω de rapport $k = \frac{x}{h}$, qui multiplie toutes les longueurs par k et toutes les surfaces par k^2 . On a donc $S(x) = \frac{x^2}{h^2} S$ et

$$V = \frac{S}{h^2} \int_{x=0}^{x=h} x^2 dx = \frac{1}{3} Sh.$$

Le volume du cône de révolution obtenu dans l'exercice 3.6 est évidemment un cas particulier, avec $S = \pi R^2$.

3) Reprenons la figure 3.51 et appliquons le théorème d'associativité. Le centre d'inertie du cône plein homogène est le barycentre des centres d'inertie $G(x)$ de chacune des tranches, ces centres d'inertie étant affectés de la masse totale $dm(x) = \mu S(x) dx$, où μ désigne la masse volumique. Par ailleurs, il est clair que chacun des barycentres partiels $G(x)$ appartient à la droite (ΩK) , où K désigne le centre d'inertie de la surface de base S . Ainsi $G \in (\Omega K)$. L'abscisse x_G de G comptée à partir du sommet vaut

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{x=0}^{x=h} x dm(x) = \frac{\mu}{M} \int_{x=0}^{x=h} x S(x) dx = \frac{\mu S}{M h^2} \int_{x=0}^{x=h} x^3 dx = \frac{1}{4M} \mu S h^2.$$

Or la masse totale M vaut $\mu V = \frac{\mu}{3} Sh$. On a donc $\mu S h = 3M$, d'où $x_G = \frac{3}{4} h$.

4) L'analogie du cône dans le plan est le triangle (Figure 3.55). Dans ce cas, la surface vaut $S = \frac{1}{2} bh$ (à comparer à $\frac{1}{3} Sh$ pour le cône de l'espace). Pour le centre d'inertie de la plaque triangulaire homogène, on a $x_G = \frac{2}{3} h$ (Exemple 3.5 de ce complément et Théorème 6.14 de *Toutes les mathématiques*), à comparer à $x_G = \frac{3}{4} h$ pour le cône de l'espace.

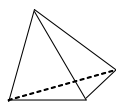


Figure 3.52

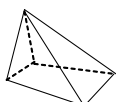


Figure 3.53

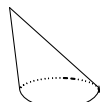


Figure 3.54

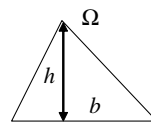


Figure 3.55

Exercice 3.19 On découpe le volume de révolution en tranches infinitésimales de hauteur dy (Figure 3.56) :

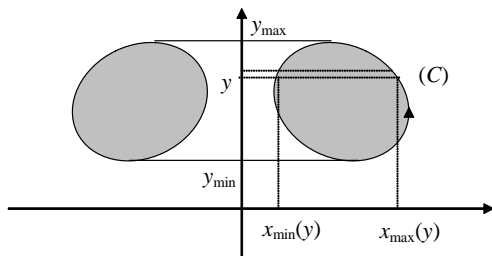


Figure 3.56

Le volume balayé par la surface S vaut $V = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} s(y) dy$, où $s(y)$ désigne la surface de la tranche d'ordonnée y . Or cette tranche est une couronne circulaire; le rayon du cercle intérieur est $x_{\min}(y)$ et le rayon du cercle extérieur est $x_{\max}(y)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} V &= \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (\pi x_{\max}(y)^2 - \pi x_{\min}(y)^2) dy = \pi \left[\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} x_{\max}(y)^2 dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} x_{\min}(y)^2 dy \right] \\ &= \pi \left[\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} x_{\max}(y)^2 dy + \int_{y_{\max}}^{y_{\min}} x_{\min}(y)^2 dy \right] = \pi \int_C x^2 dy, \end{aligned}$$

où la courbe (C) est parcourue dans le sens trigonométrique.

On utilise alors la formule de Green-Riemann avec $P = 0$ et $Q = x^2$.

Il vient $V = \pi \int_C x^2 dy = \pi \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 2\pi \iint_S x dS$.

Or $x_G = \frac{1}{S} \iint_S x dS$, d'où le deuxième théorème de Pappus-Guldin.

Exercice 3.20 Soit Σ l'intérieur de l'hypersphère. On définit son hypervolume, logiquement, par

$$V = \iiint_{\Sigma} dx dy dz dt.$$

Coupons l'hypersphère à x constant (donc par un *hyperplan* de \mathbb{R}^4). Soit Σ_x la section correspondante. Il est clair que Σ_x a pour équation $y^2 + z^2 + t^2 = R^2 - x^2$. Il s'agit donc d'une sphère dans l'espace à trois dimensions $Oyzt$, de rayon $\rho = \sqrt{R^2 - x^2}$. L'intégrale quadruple qui donne l'hypervolume s'écrit donc $V = \int_{x=-R}^{x=R} \left(\iint_{\Sigma_x} dy dz dt \right) dx$.

Or l'intégrale triple correspond au volume (ordinaire) intérieur à la sphère Σ_x . Donc

$$V = \int_{x=-R}^{x=R} \frac{4}{3} \pi \rho^3 dx = \frac{4}{3} \pi \int_{x=-R}^{x=R} (\sqrt{R^2 - x^2})^3 dx = \frac{8}{3} \pi \int_{x=0}^{x=R} (\sqrt{R^2 - x^2})^3 dx.$$

On peut calculer cette intégrale grâce au changement de variable $x = R \sin \theta$.

Il vient $V = \frac{8}{3} \pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta$. Cette dernière intégrale se calcule par linéarisation :

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{16} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4 = \frac{1}{16} (e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) = \frac{1}{8} (\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3).$$

D'où finalement $V = \frac{1}{2} \pi^2 R^4$.

Solutions des exercices du chapitre 4

Exercice 4.1 On a $\vec{E} = k \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} = k (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})$, d'où

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ y (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ z (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \frac{\partial}{\partial y} [(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}] - y \frac{\partial}{\partial z} [(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}] \\ x \frac{\partial}{\partial z} [(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}] - z \frac{\partial}{\partial x} [(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}] \\ y \frac{\partial}{\partial x} [(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}] - x \frac{\partial}{\partial y} [(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3zy (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3yz (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \\ -3xz (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3zx (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \\ -3yx (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3xy (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 4.2 1) $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}} U) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ car } \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \dots \text{ (Formule (11.21) de } \textit{Toutes les mathématiques}$$
, page 123).

2) $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{E})$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial y} = 0 \text{ (Formule (11.21) de } \textit{Toutes les mathématiques}$$
).

Exercice 4.3 1) $\text{div}(\lambda \vec{E}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\lambda \vec{E}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda E_x \\ \lambda E_y \\ \lambda E_z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda E_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda E_z).$

Par la règle de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\lambda \vec{E}) &= \frac{\partial \lambda}{\partial x} E_x + \lambda \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} E_y + \lambda \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} E_z + \lambda \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ &= \lambda \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x} E_x + \frac{\partial \lambda}{\partial y} E_y + \frac{\partial \lambda}{\partial z} E_z = \lambda (\operatorname{div} \vec{E}) + (\operatorname{grad} \lambda) \cdot \vec{E}. \end{aligned}$$

$$2) \operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{F})$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_y F_z - E_z F_y \\ E_z F_x - E_x F_z \\ E_x F_y - E_y F_x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (E_y F_z - E_z F_y) + \frac{\partial}{\partial y} (E_z F_x - E_x F_z) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x F_y - E_y F_x)$$

En utilisant de nouveau la règle de dérivation d'un produit, il vient :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{F}) &= \frac{\partial E_y}{\partial x} F_z + E_y \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial x} F_y - E_z \frac{\partial F_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial y} F_x + E_z \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ &\quad - \frac{\partial E_x}{\partial y} F_z - E_x \frac{\partial F_z}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial z} F_y + E_x \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial E_y}{\partial z} F_x - E_y \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ &= -E_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) - E_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) - E_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \\ &\quad + F_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + F_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + F_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

On reconnaît alors des produits scalaires :

$$\operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{F}) = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{F}.$$

Exercice 4.4

$$\begin{aligned} 1) \operatorname{rot}(\lambda \vec{E}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} (\lambda E_z) - \frac{\partial}{\partial z} (\lambda E_y) \\ \frac{\partial}{\partial z} (\lambda E_x) - \frac{\partial}{\partial x} (\lambda E_z) \\ \frac{\partial}{\partial x} (\lambda E_y) - \frac{\partial}{\partial y} (\lambda E_x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial y} E_z + \lambda \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial z} E_y - \lambda \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial z} E_x + \lambda \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} E_z - \lambda \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x} E_y + \lambda \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} E_x - \lambda \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial y} E_z - \frac{\partial \lambda}{\partial z} E_y \\ \frac{\partial \lambda}{\partial z} E_x - \frac{\partial \lambda}{\partial x} E_z \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x} E_y - \frac{\partial \lambda}{\partial y} E_x \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \lambda \operatorname{rot} \vec{E}. \end{aligned}$$

On a donc finalement $\operatorname{rot}(\lambda \vec{E}) = \operatorname{grad} \lambda \wedge \vec{E} + \lambda \operatorname{rot} \vec{E}$.

$$2) \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} \end{pmatrix}$$

Faisons apparaître des laplaciens :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{E}) \\ \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{div} \vec{E}) \\ \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \vec{E}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}. \end{aligned}$$

Exercice 4.5 Posons $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$, où $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ sont des constantes.

$$\text{Alors } \operatorname{rot} \vec{V} = \operatorname{rot} \left[\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} (\omega_x y - \omega_y x) - \frac{\partial}{\partial z} (\omega_z x - \omega_x z) \\ \frac{\partial}{\partial z} (\omega_y z - \omega_z y) - \frac{\partial}{\partial x} (\omega_x y - \omega_y x) \\ \frac{\partial}{\partial x} (\omega_z x - \omega_x z) - \frac{\partial}{\partial y} (\omega_y z - \omega_z y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x - (-\omega_x) \\ \omega_y - (-\omega_y) \\ \omega_z - (-\omega_z) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

On a donc $\vec{\text{rot}} \vec{V} = 2\vec{\omega}$, d'où $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\text{rot}} \vec{V}$.

Exercice 4.6 L'élément de surface vaut $d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, et θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, φ varie de 0 à 2π , indépendamment l'un de l'autre (Figure 4.21). Puisque $z = R \cos \theta$, il vient

$$I = \iint_S \sqrt{z} d\sigma = R^{\frac{5}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta} \sin \theta d\theta \right) d\varphi \\ = R^{\frac{5}{2}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{\frac{1}{2}} \sin \theta d\theta \times \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{3} R^{\frac{5}{2}} \left[-(\cos \theta)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{3} R^{\frac{5}{2}}.$$

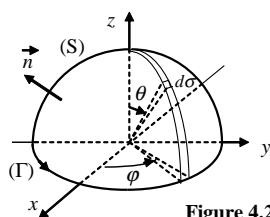


Figure 4.21

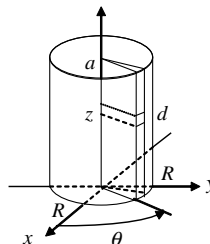


Figure 4.22

Exercice 4.7 L'élément de surface vaut $d\sigma = R d\theta dz$, et θ varie de 0 à 2π , z varie de 0 à a , indépendamment l'un de l'autre (Figure 4.22). Puisque $x = R \cos \theta$ et $y = R \sin \theta$, il vient

$$I = \iint_S \frac{z}{x^2 + y^2} d\sigma = \frac{1}{R} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{z=0}^a z dz \right) d\theta = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^a \times 2\pi = \frac{\pi a^2}{R}.$$

Exercice 4.8 Orientons par exemple Σ comme dans la figure 4.23. Le vecteur \vec{n} unitaire et normal à Σ est radial, et son angle polaire dans (\vec{i}, \vec{j}) est θ . Donc $\vec{n} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$. De plus l'élément de surface vaut $d\sigma = R d\theta dz$, et θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, z varie de 0 à h , indépendamment l'un de l'autre. Enfin on a, au point M ,

$$\vec{E} = z \vec{i} + x \vec{j} - 3y^2 z \vec{k} = z \vec{i} + R \cos \theta \vec{j} - 3R^2 \sin^2 \theta z \vec{k}.$$

Donc le flux de \vec{E} à travers la surface orientée Σ vaut

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = R \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{z=0}^h [z \cos \theta + R \sin \theta \cos \theta] dz \right) d\theta = R \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} z^2 \cos \theta + R z \sin \theta \cos \theta \right]_{z=0}^{z=h} d\theta \\ = Rh \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} h \cos \theta + R \sin \theta \cos \theta \right] d\theta = \frac{Rh}{2} [h \sin \theta + R \sin^2 \theta]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} Rh (R + h).$$

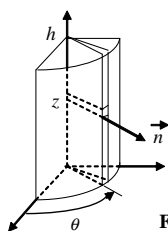


Figure 4.23

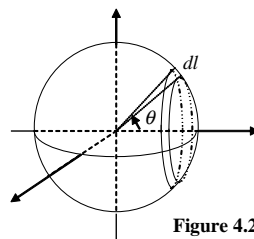


Figure 4.24

Exercice 4.9 1) On a $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = x \vec{i} + y \vec{j} - 2z \vec{k}$. Orientons la demi-sphère comme indiqué figure 4.21.

Alors $\vec{n} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} = \frac{1}{R}(x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})$. Par conséquent $\phi = \iint_S \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \frac{1}{R} \iint_S (x^2 + y^2 - 2z^2) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$.

Puisque $x = R \sin \theta \cos \varphi$, $y = R \sin \theta \sin \varphi$ et $z = R \cos \theta$, il vient

$$\phi = R^3 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \right) d\varphi = 2\pi R^3 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 3 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\ = 2\pi R^3 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta - 3 \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta = 2\pi R^3 \left[-\cos \theta + \cos^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

2) La formule de Stokes s'écrit $\iint_S \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{M}$ (Figure 4.21).

On on a $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $z = 0$, $dx = -R \sin \varphi d\varphi$, $dy = R \cos \varphi d\varphi$ et $dz = 0$ pour tout $M \in (\Gamma)$. Donc

$$\phi = \iint_S \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} y dx + x(1 - 2z) dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} R^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi - R^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0.$$

3) La réunion de S et du disque D de centre O de rayon R dans le plan Oxy constitue une surface fermée Σ . On oriente celle-ci vers l'extérieur. Cela signifie que, pour S , le vecteur normal unitaire est \vec{n} , comme dans la figure 4.21, tandis que pour D , le vecteur normal unitaire est $-\vec{k}$. La formule d'Ostrogradski s'écrit

$$\iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \iiint_V \text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) dV = 0, \text{ car } \text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = 0.$$

En décomposant le flux en deux, il vient $\iint_S \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma + \iint_D \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = 0$.

Or pour $M \in D$, on a $\vec{n} = -\vec{k}$, donc $\iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \iint_D \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{k} \cdot d\sigma = \iint_D -2z \cdot d\sigma = 0$, car $z = 0$ dans D .

Exercice 4.10 On procède comme dans l'exercice 4.9, question 3 (voir Figure 4.21). La réunion de S et du disque D de centre O de rayon R dans le plan Oxy constitue une surface fermée Σ . On oriente celle-ci vers l'extérieur. Cela signifie que, pour S , le vecteur normal unitaire est \vec{n} , comme dans la figure 4.21, tandis que pour D , le vecteur normal unitaire est $-\vec{k}$.

La formule d'Ostrograski s'écrit de nouveau $\iint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \iiint_V \text{div } \vec{E} \cdot dV = 0$, car $\text{div } \vec{E} = 0$ (un champ constant est à flux conservatif). En décomposant le flux en deux, il vient $\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma \cdot d\sigma + \iint_D \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma \cdot d\sigma = 0$.

Or pour $M \in D$, le vecteur normal est $-\vec{k}$, donc $\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma \cdot d\sigma = \iint_D \vec{E} \cdot \vec{k} \cdot d\sigma = \iint_D E \cdot d\sigma = \pi R^2 E$.

Exercice 4.11 1) On sait que cet angle solide est égal à la surface découpée sur la sphère de centre O de rayon R par le cône s'appuyant sur D . Celui-ci est un cône de révolution d'angle au centre α tel que $\tan \alpha = \frac{R}{a}$ (Figure 4.19). Pour calculer cette surface, examinons la figure 4.24. Une augmentation de l'angle θ de $d\theta$ correspond à une augmentation de surface de $dS = 2\pi r dl$, où r désigne le rayon du cercle découpé sur la sphère de rayon $\rho = 1$, et $dl = \rho d\theta = d\theta$. Puisque $\sin \theta = \frac{r}{\rho} = r$, il vient

$$\Omega = \int_{\theta=0}^{\theta=\arctan \frac{R}{a}} dS = 2\pi \int_{\theta=0}^{\theta=\arctan \frac{R}{a}} \sin \theta d\theta = 2\pi (1 - \cos(\arctan \frac{R}{a})).$$

Puisque $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, on a $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Donc finalement $\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$.

2) On sait que ce flux vaut $\phi = k\Omega$, donc $\phi = 2\pi k \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$.

Exercice 4.12 1) a) On a d'abord, puisque $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{1}{8} \left[\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Pour calculer J , on écrit $J = \int_0^\pi (\sin^2 \theta)^2 \sin \theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta)^2 \sin \theta d\theta = \int_0^\pi (\sin \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta + \cos^4 \theta \sin \theta) d\theta = [-\cos \theta + \frac{2}{3} \cos^3 \theta - \frac{1}{5} \cos^5 \theta]_0^\pi = \frac{16}{15}$.

b) Comme on l'a vu, la normale passe par le centre de la sphère.

Donc $\vec{n} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} = \frac{1}{R}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$. Par suite $\vec{E} \cdot \vec{n} = xy^2 \vec{i} \cdot \frac{1}{R}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{1}{R}x^2y^2$.

L'élément de surface dS à la surface de la sphère vaut $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, où R , θ et φ désignent les coordonnées sphériques du point M . Donc $\phi = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{1}{R}x^2y^2 R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$.

Or $x = R \sin \theta \cos \varphi$ et $y = R \sin \theta \sin \varphi$. Donc, en utilisant a),

$$\phi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{1}{R}x^2y^2 R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = R^5 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^5 \theta d\theta = \frac{4\pi}{15} R^5.$$

2) On sait que $\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$, donc ici $\text{div } \vec{E} = y^2$.

En utilisant les coordonnées sphériques, on a $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$, donc

$$\iiint_{(\Sigma)} \text{div } \vec{E} \cdot dV = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=0}^{r=R} r^4 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi dr d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \cdot \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \cdot \int_{r=0}^{r=R} r^4 dr.$$

Les deux premières intégrales se calculent comme en 1) a) :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left[\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \int_0^\pi (\sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta = [-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta]_0^\pi = \frac{4}{3}.$$

On obtient donc finalement $\iiint_{(\Sigma)} \text{div } \vec{E} \cdot dV = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^R = \frac{4\pi}{15} R^5$.

En utilisant la formule d'Ostrograski, on retrouve $\phi = \frac{4\pi}{15} R^5$.

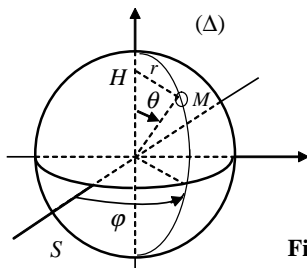


Figure 4.25

Exercice 4.13 Soit dm une masse infinitésimale entourant le point M sur la surface de cette sphère S , et $d\sigma$ la surface infinitésimale correspondante (Figure 4.25). Alors $dm = \mu d\sigma$ et $J = \iint_S r^2 dm = \mu \iint_S r^2 d\sigma$. Donc

$$J = \mu \iint_S (R \sin \theta)^2 R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \mu R^4 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \mu R^4 \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (\sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta \right) = 2\pi \mu R^4 \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi = \frac{8}{3} \pi \mu R^4.$$

Or, si \mathcal{M} est la masse de la sphère, on a $\mu = \frac{\mathcal{M}}{S} = \frac{\mathcal{M}}{4\pi R^2}$, donc $J = \frac{2}{3} \mathcal{M} R^2$.

Exercice 4.14 1) $\frac{\partial}{\partial y} \left[y (h^2 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = (h^2 + x^2) (h^2 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$.

Il en résulte que $\int (h^2 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dy = \frac{y}{h^2+x^2} (h^2 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + C$.

2) Par définition, cet angle solide vaut $\Omega = \iint_{\Sigma} \frac{\vec{HM}}{\|\vec{HM}\|^3} \cdot \vec{n} d\sigma$.

Or ici $\vec{n} = -\vec{k}$ (voir Figure 4.20), donc $\Omega = -\iint_{\Sigma} \frac{x\vec{i} + y\vec{j} - h\vec{k}}{(\sqrt{x^2+y^2+h^2})^3} \cdot (-\vec{k}) dx dy = h \int_{x=0}^{x=a} \left(\int_{y=0}^{y=b} (h^2 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dy \right) dx$.

En utilisant la question 1, il vient $\Omega = h \int_{x=0}^{x=a} \left[\frac{y}{h^2+x^2} (h^2 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_{y=0}^{y=b} dx = hb \int_0^a \frac{dx}{(h^2+x^2)\sqrt{h^2+b^2+x^2}}$.

3) $dx = \frac{\sqrt{h^2+b^2}}{\cos^2 t} dt$ et $\sqrt{h^2+b^2+x^2} = \sqrt{h^2+b^2}\sqrt{1+\tan^2 t} = \frac{\sqrt{h^2+b^2}}{\cos t}$.

Donc $\Omega = hb \int_0^{\arctan \frac{a}{\sqrt{h^2+b^2}}} \frac{\cos t \cdot dt}{[h^2+(h^2+b^2)\tan^2 t] \cos^2 t} = hb \int_0^{\arctan \frac{a}{\sqrt{h^2+b^2}}} \frac{\cos t \cdot dt}{[h^2+b^2 \sin^2 t]}$.

A un facteur près, on a à intégrer une fonction de la forme $\frac{u'}{1+u^2}$.

Par suite $\Omega = \frac{b}{h} \int_0^{\arctan \frac{a}{\sqrt{h^2+b^2}}} \frac{\cos t \cdot dt}{[1+(\frac{b}{h} \sin t)^2]} = \left[\arctan \left(\frac{b}{h} \sin t \right) \right]_0^{\arctan \frac{a}{\sqrt{h^2+b^2}}}$.

Puisque $1 + \cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$, on a $\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, d'où

$$\Omega = \arctan \frac{b}{h} \frac{\frac{a}{\sqrt{h^2+b^2}}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{h^2+b^2}}} = \arctan \left(\frac{ab}{h\sqrt{a^2 + b^2 + h^2}} \right).$$

Index

- Accroissement infinitésimal, 1
- Analyse vectorielle, 32
- Angle solide, 41

- Barycentre, 25

- Cône, 30
- Cône de révolution, 27
- Centre d'inertie, 25
- Champ à flux conservatif, 40
- Champ constant, 5
- Champ de gradients, 7
- Champ de vecteurs, 5, 32
- Champ newtonien, 5, 33, 36
- Circulation, 6
- Circulation infinitésimale, 5
- Connexe, 2
- Conservatif, 7
- Courbe fermée, 8
- Couronne circulaire, 14

- Déplacement infinitésimal, 4
- Différentielle, 1
- Différentielle (Expression intrinsèque), 4
- Différentielle exacte, 7
- Différentielle logarithmique, 2
- Divergence, 32
- Divergence en sphériques, 38
- Domaine d'intégration, 12, 22

- Élément de surface orienté, 37
- Ellipsoïde, 34
- Equation d'état, 3
- Expression intrinsèque de la divergence, 37
- Expression intrinsèque du rotationnel, 39

- Flux, 37
- Folium de Descartes, 9
- Forme différentielle, 6
- Formule d'Ostrogradski, 40
- Formule de Stokes, 40

- Gauss, 41
- Gradient, 4, 32
- Gradient en cylindriques, 5
- Gradient en sphériques, 8

- Hypersphère, 31

- Intégrale curviligne, 6

- Intégrale de surface, 36
- Intégrale double, 11
- Intégrale triple, 20
- Intrinsèque, 4

- Laplacien, 33
- Ligne de champ, 35

- Masse linéique, 21
- Masse surfacique, 21
- Masse volumique, 21
- Moment d'inertie, 20, 23, 30

- Nabla, 32
- Nappe paramétrée, 34

- Opérateur aux dérivées partielles, 32
- Orientation d'une surface, 35

- Pavé, 15
- Pendule simple, 21
- Plaque triangulaire, 27
- Potentiel scalaire, 7

- Ressort, 46
- Rotationnel, 32

- Solide de révolution, 24
- Solide homogène, 21
- Stéradian, 41
- Surface équipotentielle, 36
- Surface de l'espace, 11, 33
- Surface de révolution, 28
- Surface du tore circulaire, 28
- Surface fermée, 35
- Surface infinitésimale, 11, 36
- Surface infinitésimale (cartésiennes), 12
- Surface infinitésimale (polaires), 13
- Surface intérieure (courbe fermée), 17
- Surface orientée, 37

- Tétraèdre, 22
- Tangente à l'ellipse, 3
- Théorème d'associativité, 26
- Théorèmes de Pappus-Guldin, 28
- Tore circulaire, 28
- Tube de champ, 41

- Variables indépendantes, 1
- Variables liées, 2
- Variation infinitésimale, 6

- Vecteur normal à une surface, 34
- Vecteur normal unitaire, 35
- Volume algébrique, 11
- Volume de la sphère, 29
- Volume du cône de révolution, 30
- Volume du tore circulaire, 29
- Volume infinitésimal, 20
- Volume infinitésimal (cartésiennes), 22
- Volume infinitésimal (cylindriques), 23
- Volume infinitésimal (sphériques), 24