CHAPITRE 26
ANALYSE VECTORIELLE

L'analyse vectorielle fait intervenir à la fois des outils analytiques (dérivées partielles) et du calcul vectoriel. Les notions de base de l'analyse vectorielle sont indispensables en électrostatique, en électromagnétisme, en mécanique des fluides. Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :
A. Connaître les opérateurs de l'analyse vectorielle (nabla, gradient, divergence et rotationnel) et savoir démontrer leurs propriétés.
B. Savoir calculer des intégrales de surface simples.
C. Connaître la définition du flux d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée, et savoir calculer des flux simples.
D. Savoir ce qu'est un champ à flux conservatif.
E. Connaître les formules de Stokes et d'Ostrogradski.
F. Savoir ce qu'est un angle solide.

26.1 Opérateurs de l'analyse vectorielle

L'espace est rapporté à la base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On définit l'opérateur aux dérivées partielles *nabla* par

$$\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}. \tag{26.1}$$

On notera que *nabla* est un *opérateur aux dérivées partielles*, et pas un vecteur. Il opère *à gauche* en utilisant les trois types de multiplication vectorielle. Par exemple, soit d'abord $U = U(M)$ une fonction de trois variables (fonction scalaire). On définit le *gradient* de U par

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \overrightarrow{\nabla}U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}\right)U = \frac{\partial U}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\overrightarrow{k}.$$

On retrouve (23.13). Si $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(M) = E_x\overrightarrow{i} + E_y\overrightarrow{j} + E_z\overrightarrow{k}$ un champ de vecteurs, on définit la *divergence* de $\overrightarrow{E}$ par

$$\text{div}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \tag{26.2}$$

et le *rotationnel* de $\overrightarrow{E}$ par

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} &= \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \qquad (26.3) \\ &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}. \end{aligned}$$

Remarque 26.1 L'opérateur nabla est essentiellement une *notation*, très commode pour retenir les définitions du gradient, de la divergence et du rotationnel. On notera que $\overrightarrow{\text{grad}}U$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}$ sont des *vecteurs* de $\mathbb{R}^3$, alors que div $\overrightarrow{E}$ est un nombre réel, c'est-à-dire un *scalaire*.

Exemple 26.1 Soit k un paramètre. Considérons le *champ newtonien* défini en coordonnées sphériques [voir (23.17)] par $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(M) = \frac{k}{r^2}\overrightarrow{e_r}$.
Puisque $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et $\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$, on a

$$\overrightarrow{E} = k\frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3} = \frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\right). \tag{26.4}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \text{div}\,\overrightarrow{E} &= k\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\right]. \end{aligned}$$

En utilisant la formule qui donne la dérivée d'un produit, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right) &= \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} \\ &= \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\left(x^2+y^2+z^2-3x^2\right) \\ &= \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\left(-2x^2+y^2+z^2\right).\end{aligned}$$

Les dérivées partielles par rapport à y et z s'obtiennent sans calcul en permutant les rôles de x et y et ceux de x et z respectivement. Ainsi

$$\operatorname{div}\overrightarrow{E} = k\frac{\left(-2x^2+y^2+z^2\right)+\left(x^2-2y^2+z^2\right)+\left(x^2+y^2-2z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} = 0.$$

Un champ newtonien est à divergence nulle. Un calcul analogue montre qu'on a aussi $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ (exercice 26.1).

Remarque 26.2. Composons la divergence et le gradient :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}U\right) &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\overrightarrow{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\overrightarrow{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\overrightarrow{k}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

On introduit ainsi un nouvel opérateur, le *laplacien* :

$$\Delta U = \operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}U) = \overrightarrow{\nabla}^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \qquad (26.5)$$

A partir des définitions, on peut démontrer des *formules d'analyse vectorielle.* Les deux plus importantes, qui doivent être connues, sont

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}U) = \overrightarrow{0}\ ,\ \operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E}) = 0. \qquad (26.6)$$

Voir l'exercice 26.2 pour leur démonstration. Les exercices 26.3 et 26.4 donnent d'autres exemples de formules utiles.

26.2 Surfaces de l'espace

26.2.1 Représentation d'une surface

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, une *surface* (Σ) est définie par une équation de la forme $F(x,y,z)=0$. Par exemple, l'équation $ax+by+cz+d=0$ est celle d'un plan, tandis que l'équation

$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$ est celle de la sphère de centre Ω de rayon R. Un troisième exemple important est le suivant.

Exemple 26.2 Soient a, b, $c \in \mathbb{R}_+^*$. L'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{26.7}$$

est celle d'un *ellipsoïde* de centre O, d'axes principaux Ox, Oy, Oz. Pour visualiser cette surface, coupons-la par un plan horizontal d'équation $z = z_0$, avec $-c < z_0 < c$. La section correspondante a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{c^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Il s'agit donc d'une ellipse. Ainsi la section d'un ellipsoïde par un plan horizontal est une ellipse. Il en est de même lorsqu'on coupe l'ellipsoïde par un plan $x = x_0$ ou $y = y_0$. Ainsi un ellipsoïde a la forme d'un ballon de rugby aplati, comme représenté figure 26.1. Si $a = b = c = R$, l'ellipsoïde est la sphère de centre O de rayon R.

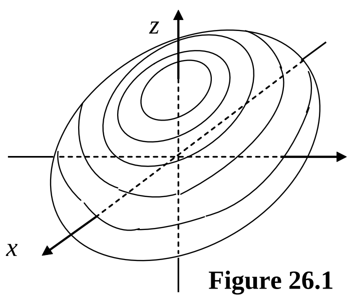

Figure 26.1

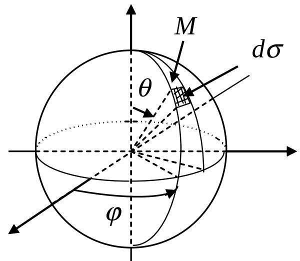

Figure 26.2

Il est souvent commode d'utiliser une *représentation paramétrique* d'une surface. Puisqu'une surface est un objet à deux dimensions, il est nécessaire d'utiliser deux paramètres. Ainsi une représentation paramétrique d'une surface est de la forme $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, $z = h(u,v)$. On parle alors de *nappe paramétrée.*

Exemple 26.3 La surface de la sphère de centre O de rayon R peut être paramétrée par

$$x = R\sin\theta\cos\varphi \ \ , \ \ y = R\sin\theta\sin\varphi \ \ , \ \ z = R\cos\theta, \tag{26.8}$$

où θ varie entre 0 et π, tandis que φ varie entre 0 et 2π (figure 26.2). En effet, le paramétrage (26.8) n'est pas autre chose que les formules de passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes, avec $r = R$ (formules (5.21)), puisque le point M se déplace à la surface de la sphère.

26.2.2 Vecteur normal à une surface

Théorème 26.1 *Un vecteur normal à la surface* (Σ) *d'équation cartésienne* $F(x, y, z) = 0$ *au point* $M(x, y, z)$ *est le vecteur* $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{\text{grad}}F(M)$.

Démonstration Déplaçons le point M d'un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{dM}$ en restant sur la surface (Σ) (figure 26.3). Alors F reste égal à 0 dans ce déplacement, de telle sorte que $dF = 0$. Or $dF = \overrightarrow{\text{grad}}\ F(M)\,.\overrightarrow{dM}$. Il en résulte que $\overrightarrow{\text{grad}}\ F(M)\,.\overrightarrow{dM} = 0$ pour tout déplacement $\overrightarrow{dM}$ sur (Σ), c'est-à-dire que $\overrightarrow{\text{grad}}\ F(M)$ et $\overrightarrow{dM}$ sont orthogonaux pour tout déplacement infinitésimal sur la surface de (Σ) à partir de M. Ainsi $\overrightarrow{\text{grad}}F(M)$ est bien normal à (Σ) au point M.

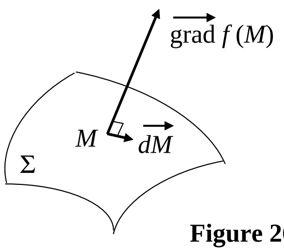

Figure 26.3

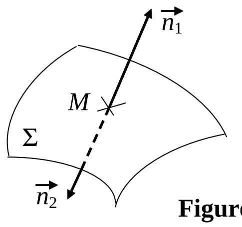

Figure 26.4

Exemple 26.4 Si (P) est le plan d'équation $ax+by+cz+d = 0$, un vecteur normal à (P) est

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{\text{grad}}F = \tfrac{\partial F}{dx}\overrightarrow{i} + \tfrac{\partial F}{\partial y}\overrightarrow{j} + \tfrac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{k} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} + c\,\overrightarrow{k}\,.$$

Le vecteur normal est indépendant de M et on retrouve le théorème 9.2.

Exemple 26.5 Soit $M(x, y, z)$ un point de l'ellipsoïde d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Un vecteur normal en M est

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{\text{grad}}F = \tfrac{\partial F}{dx}\overrightarrow{i} + \tfrac{\partial F}{\partial y}\overrightarrow{j} + \tfrac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{k} = 2\left(\tfrac{x}{a^2}\overrightarrow{i} + \tfrac{y}{b^2}\overrightarrow{j} + \tfrac{z}{c^2}\overrightarrow{k}\right).$$

Dans le cas particulier de la sphère de centre O de rayon R, on voit que

$$\overrightarrow{N} = \frac{2}{R^2}\left(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}\right) = \frac{2}{R^2}\overrightarrow{OM}.$$

On retrouve ainsi que le rayon $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à la surface de la sphère, ce qui est évident géométriquement.

Remarque 26.3 Soit $\overrightarrow{N}$ un vecteur normal en un point M d'une surface (Σ). On peut définir deux vecteurs normaux *unitaires* en M (figure 26.4) :

$$\overrightarrow{n_1} = \frac{\overrightarrow{N}}{\left\|\overrightarrow{N}\right\|} \text{ et } \overrightarrow{n_2} = -\frac{\overrightarrow{N}}{\left\|\overrightarrow{N}\right\|} = -\overrightarrow{n_1}.$$

Lorsqu'on a choisi un des deux vecteurs normaux unitaires, on dit qu'on a *orienté* la surface (Σ). Ceci revient à définir un *sens positif de traversée* de (Σ) (dans le sens du vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}$ choisi).

Remarque 26.4 On dit qu'une surface de l'espace est *fermée* lorsqu'elle délimite un intérieur et un extérieur. Par exemple une sphère ou un ellipsoïde sont des surfaces fermées. Par contre un plan n'en est pas une. Par convention, *une surface fermée est toujours orientée vers l'extérieur*, c'est-à-dire que son vecteur normal unitaire est dirigé vers l'extérieur. Ainsi la sphère de centre O de rayon R est orientée par le vecteur normal unitaire

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|} = \frac{1}{R}\left(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}\right).$$

26.2.3 Lignes de champs et surfaces équipotentielles

Soit $\overrightarrow{E}$ un champ de vecteurs. On appelle *ligne de champ* toute courbe (L) telle que, en tout point M de (L), le champ $\overrightarrow{E}$ en M est tangent à (L).

Par exemple, si $\overrightarrow{E} = -g\,\overrightarrow{k}$ est le champ de pesanteur au voisinage du sol, les lignes de champ sont les droites verticales (figure 26.5). Si $\overrightarrow{E} = \frac{k}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ est un champ newtonien d'origine O, les lignes de champ sont les droites passant par O (figure 26.6).

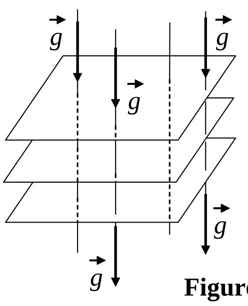

Figure 26.5

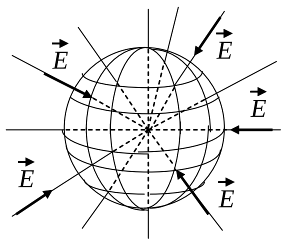

Figure 26.6

Supposons maintenant que le champ $\overrightarrow{E}$ dérive d'un potentiel scalaire V ; alors $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$. On appelle *surface équipotentielle* toute surface où les points sont au même potentiel, c'est-à-dire d'équation $V = C$, où C est une constante donnée.

Ainsi, *le flux du champ newtonien* $\overrightarrow{E} = \frac{k}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ *à travers* (Σ) *vaut* $\phi = k\Omega$.

Montrons que la formule (26.17) généralise la définition géométrique lorsque la droite OM coupe (Σ) en un seul point M pour tout point M de (Σ) (figure 26.18). La surface fermée $ABCDA'B'C'D'$ est alors un tube de champ pour le champ newtonien $\overrightarrow{E_1} = \frac{1}{r^2}\overrightarrow{e_r}$, puisque le champ est tangent à chacune des surfaces latérales $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ et $DAA'D'$. Le champ newtonien étant à flux conservatif (exemple 26.15), le flux entrant est égal au flux sortant, qui est, par (26.17), l'angle solide Ω. En notant S la surface $A'B'C'D'$ sur la sphère de centre O de rayon 1, nous avons donc

$$\Omega = \iint_S \frac{1}{r^2}\overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{n}.d\sigma = \iint_S d\sigma = S,$$

puisque au point N situé à la surface de la sphère, on a $r = 1$ et $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{n}$. L'angle solide défini par Gauss comme le flux d'un champ newtonien généralise bien la définition géométrique.

Théorème 26.4 *L'angle solide sous lequel on voit une surface fermée* (Σ) *depuis un point* O *de l'espace vaut* 4π *si le point* M *est intérieur à* (Σ), *et* 0 *si le point* O *est extérieur à* (Σ).

Démonstration Si on regarde (Σ) depuis un point intérieur, on est complètement entouré par elle. L'angle solide correspond donc à tout l'espace, c'est-à-dire 4π sr. Si on regarde la surface depuis un point extérieur, le flux de $\overrightarrow{E_1}$ à travers (Σ) est nul, car $\overrightarrow{E_1}$ est à flux conservatif dans (Σ).

Exercices du chapitre 26

Les basiques

Exercice 26.1 (A) Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}$, où $\overrightarrow{E} = \frac{k}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ est un champ newtonien.

Exercice 26.2 (A) Démontrer que $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}U) = \overrightarrow{0}$ et $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}) = 0$.

Exercice 26.3 (A) Soit $\lambda = \lambda(M)$ une fonction scalaire, $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(M)$ et $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(M)$ des champs de vecteurs. Démontrer les formules suivantes :
1) $\text{div}(\lambda\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{E}.\overrightarrow{\text{grad}}\,\lambda + \lambda\,\text{div}\,\overrightarrow{E}$.
2) $\text{div}(\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} - \overrightarrow{E}.\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F}$.

Exercice 26.4 (A) Transformer $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\text{rot}}(\lambda\overrightarrow{E})$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E})$.

Exercice 26.5 (A) Soit $\overrightarrow{\omega}$ un vecteur constant, et soit $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$. Démontrer que $\overrightarrow{\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}$.

Exercice 26.6 (B) Calculer l'intégrale de surface $I = \iint_S f(M)\, d\sigma$, où $f(M) = f(x,y,z) = \sqrt{z}$. Ici $R > 0$ est fixé, et S est la demi-sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$,

Exercice 26.7 (B) Soit $R > 0$ et $a > 0$ et soit S est le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq a$. Calculer l'intégrale de surface $I = \iint_S f(M)\, d\sigma$, où $f(M) = f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}$.

Exercice 26.8 (C) Soit $R > 0$ et $h > 0$. Soit la portion Σ de cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leq z \leq h$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Déterminer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{E} = z\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} - 3y^2 z\overrightarrow{k}$ à travers Σ (on précisera l'orientation choisie).

Exercice 26.9 (A,C,E) Soit $R > 0$, et soit S la demi-sphère d'équation $z \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Soit $\overrightarrow{E} = y\overrightarrow{i} + x(1-2z)\overrightarrow{j} - xy\overrightarrow{k}$.
1) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{E}$. En déduire le flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{E}$ à travers S (on précisera l'orientation choisie).
2) Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Stokes.
3) Retrouver ce résultat en fermant la surface S par le disque de centre O de rayon R situé dans le plan Oxy, et en utilisant la formule d'Ostrogradski.

Exercice 26.10 (C,D,E) Soit $R > 0$ donné, et soit S la demi-sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.En utilisant la formule d'Ostrogradski, trouver le flux du champ constant $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{k}$ à travers S (on précisera l'orientation de S choisie).

Exercice 26.11 (C,D,F) Soit $R > 0$ et $a > 0$. Soit D le disque de la figure 26.19, centré sur Oy et perpendiculaire à Oy.
1) Calculer l'angle solide sous lequel on voit ce disque depuis le point O.
2) Calculer le flux du champ newtonien $\overrightarrow{E} = \frac{k}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ à travers D, orienté dans le sens des y croissants.

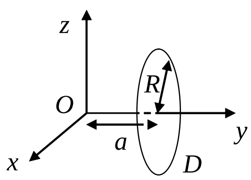

Figure 26.19

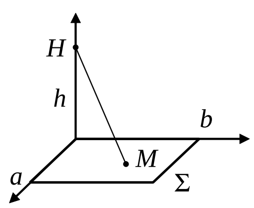

Figure 26.20

Les techniques

Exercice 26.12 On se propose de calculer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{E} = xy^2\overrightarrow{i}$ à travers la surface de la sphère (S) de centre O de rayon R orientée vers l'extérieur, de deux manières différentes.
1) *Calcul direct.*
a) Calculer les intégrales $I = \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cos^2\varphi d\varphi$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^5\theta d\theta$.
b) Calculer $\overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}$, puis le flux ϕ du champ $\overrightarrow{E}$ à travers (S).
2) *Calcul par la formule d'Ostrogradski.*
Calculer div $\overrightarrow{E}$, en déduire ϕ.

Exercice 26.13 Déterminer le moment d'inertie d'une sphère creuse homogène, de rayon R, de masse totale $\mathcal{M}$, de masse surfacique μ, par rapport à un axe (Δ) passant par son centre.

Les exotiques et les olympiques

Exercice 26.14 Soit Σ le rectangle $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ (figure 26.20). Soit $H\,(0,0,h)$, avec $h > 0$.
1) Calculer $\frac{\partial}{\partial y}\left[y\left(h^2+x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$.
2) Montrer que l'angle solide Ω suivant lequel on voit Σ du point H vaut

$$\Omega = hb\int_{x=0}^{x=a} \frac{dx}{(h^2+x^2)\sqrt{h^2+b^2+x^2}}.$$

3) Calculer Ω grâce au changement de variable $x = \sqrt{h^2+b^2}\tan t$.

(donc par un *hyperplan* de $\mathbb{R}^4$). Soit Σ_x la section correspondante. Il est clair que Σ_x a pour équation $y^2+z^2+t^2 = R^2-x^2$. Il s'agit donc d'une sphère dans l'espace à trois dimensions $Oyzt$, de rayon $\rho = \sqrt{R^2-x^2}$. L'intégrale quadruple qui donne l'hypervolume s'écrit donc $V = \int_{x=-R}^{x=R} \left(\iiint_{\Sigma_x} dydzdt \right) dx$. Or l'intégrale triple correspond au volume (ordinaire) intérieur à la sphère Σ_x. Donc
$V = \int_{x=-R}^{x=R} \frac{4}{3}\pi\rho^3 dx = \frac{4}{3}\pi \int_{x=-R}^{x=R} \left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^3 dx = \frac{8}{3}\pi \int_{x=0}^{x=R} \left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^3 dx$.
On peut calculer cette intégrale grâce au changement de variable $x = R\sin\theta$. Il vient $V = \frac{8}{3}\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta$. Cette dernière intégrale se calcule par linéarisation :

$$\begin{aligned} \cos^4\theta &= \frac{1}{16}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+4e^{2i\theta}+6+4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3\right). \end{aligned}$$

Il vient finalement $V = \frac{1}{2}\pi^2 R^4$.

Solutions des exercices du chapitre 26

Exercice 26.1 On a $\overrightarrow{E} = k\frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3} = k\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}\right)$, d'où

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right] - y\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right] \\ x\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right] - z\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right] \\ y\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right] - x\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3zy\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} + 3yz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} \\ -3xz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} + 3zx\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} \\ -3yx\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} + 3xy\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 26.2 1) $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}U\right) = \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{\text{grad}}U = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ car } \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y} \text{... (th. de Schwarz)..}$$

2) $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla}.(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E})$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial y} = 0 \text{ (formule (11.21)).}$$

Exercice 26.3 1) $\mathrm{div}(\lambda \overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\nabla}.\left(\lambda \overrightarrow{E}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda E_x \\ \lambda E_y \\ \lambda E_z \end{pmatrix}$

$= \frac{\partial}{\partial x}(\lambda E_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda E_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda E_z)$. Par la règle de dérivation d'un produit :

$\mathrm{div}(\lambda \overrightarrow{E}) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} E_x + \lambda \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} E_y + \lambda \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} E_z + \lambda \frac{\partial E_z}{\partial z}$

$= \lambda \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x} E_x + \frac{\partial \lambda}{\partial y} E_y + \frac{\partial \lambda}{\partial z} E_z = \lambda(\mathrm{div}\, \lambda \overrightarrow{E}) + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \lambda).\overrightarrow{E}.$

2) $\mathrm{div}(\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\nabla}.(\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{F})$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \left[\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} E_y F_z - E_z F_y \\ E_z F_x - E_x F_z \\ E_x F_y - E_y F_x \end{pmatrix}$$

$= \frac{\partial}{\partial x}(E_y F_z - E_z F_y) + \frac{\partial}{\partial y}(E_z F_x - E_x F_z) + \frac{\partial}{\partial z}(E_x F_y - E_y F_x)$

En utilisant de nouveau la règle de dérivation d'un produit, il vient :

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{F}) &= \frac{\partial E_y}{\partial x} F_z + E_y \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial x} F_y - E_z \frac{\partial F_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial y} F_x + E_z \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ &\quad - \frac{\partial E_x}{\partial y} F_z - E_x \frac{\partial F_z}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial z} F_y + E_x \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial E_y}{\partial z} F_x - E_y \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ &= -E_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - E_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) - E_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \\ &\quad + F_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + F_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + F_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

On reconnaît alors des produits scalaires :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{F}) = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$= \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} - \overrightarrow{E}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F}.$

Exercice 26.4

$$1)\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\lambda \overrightarrow{E}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(\lambda E_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\lambda E_y) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\lambda E_x) - \frac{\partial}{\partial x}(\lambda E_z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\lambda E_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\lambda E_x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial y} E_z + \lambda \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial z} E_y - \lambda \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial z} E_x + \lambda \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} E_z - \lambda \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x} E_y + \lambda \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} E_x - \lambda \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial y}E_z - \frac{\partial\lambda}{\partial z}E_y \\ \frac{\partial\lambda}{\partial z}E_x - \frac{\partial\lambda}{\partial x}E_z \\ \frac{\partial\lambda}{\partial x}E_y - \frac{\partial\lambda}{\partial y}E_x \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \lambda.\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}.$$

On a donc finalement $\overrightarrow{\text{rot}}(\lambda\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}\ \lambda \wedge E + \lambda.\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}$.

2) $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E})$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial x} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial z} \end{pmatrix}$$

Faisons apparaître des laplaciens :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\text{div}\,\overrightarrow{E}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(\text{div}\,\overrightarrow{E}) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\text{div}\,\overrightarrow{E}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\overrightarrow{E}) - \Delta\overrightarrow{E}.$$

Exercice 26.5 Posons $\overrightarrow{\omega} = \omega_x\overrightarrow{i} + \omega_y\overrightarrow{j} + \omega_z\overrightarrow{k}$, où ω_x, ω_y, ω_z sont des constantes.

Alors $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\left[\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(\omega_x y - \omega_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega_z x - \omega_x z) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\omega_y z - \omega_z y) - \frac{\partial}{\partial x}(\omega_x y - \omega_y x) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\omega_z x - \omega_x z) - \frac{\partial}{\partial y}(\omega_y z - \omega_z y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x - (-\omega_x) \\ \omega_y - (-\omega_y) \\ \omega_z - (-\omega_z) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

On a donc $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V} = 2\overrightarrow{\omega}$, d'où $\overrightarrow{\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V}$.

Exercice 26.6 L'élément de surface vaut $d\sigma = R^2\sin\theta d\theta d\varphi$, et θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, φ varie de 0 à 2π, indépendamment l'un de l'autre (figure 26.21).

Puisque $z = R\cos\theta$, il vient

$$I = \iint_S \sqrt{z}d\sigma = R^{\frac{5}{2}}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\theta}\sin\theta d\theta\right)d\varphi$$

$$= R^{\frac{5}{2}}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\sin\theta d\theta \times \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}d\varphi = \frac{4\pi}{3}R^{\frac{5}{2}}\left[-(\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{3}R^{\frac{5}{2}}.$$