SUITES RECURRENTES DU SECOND ORDRE

Le but de ce complément est de démontrer le théorème suivant, admis dans TLM1 (page 370).

Théorème 30.3 : *Soit* u_n *vérifiant une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants, de la forme*

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \qquad (R)\,,$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. *On associe à* (R) *l'équation caractéristique*

$$r^2 = ar + b \qquad (EC)\,,$$

obtenue en remplaçant u_n *par* 1, u_{n+1} *par* r *et* u_{n+2} *par* r^2. *Alors :*

a) *Si l'équation caractéristique* (EC) *admet deux racines distinctes* r_1 *et* r_2 *(réelles ou complexes), il existe deux constantes* λ *et* μ *telles que*

$$u_n = \lambda\,(r_1)^n + \mu\,(r_2)^n \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

b) *Si l'équation caractéristique* (EC) *admet une seule racine (double)* r, *il existe deux constantes* λ *et* μ *telles que*

$$u_n = r^n\,(\lambda + \mu n) \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Les constantes λ *et* μ *se calculent à partir des deux premiers termes de la suite (conditions initiales).*

Démonstration du théorème 30.3 : On procède en trois étapes.

Etape 1 : Soit r un nombre complexe solution de l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$. Soit la suite v_n définie par

$$v_n = u_{n+1} - r u_n \tag{3}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, . Alors v_n est géométrique de raison $a - r$. En effet

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - r u_{n+1} = (a-r)\,u_{n+1} + b u_n = (a-r)\,(u_{n+1} - r u_n) + r(a-r)u_n + b u_n \\ &= (a-r)\,v_n + \left(b + ar - r^2\right) u_n = (a-r)\,v_n\,. \end{aligned}$$

Etape 2 : On se place dans le cas où l'équation $r^2 = ar + b$ admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2.
Alors on sait que $r_1 + r_2 = a$ (somme des racines de l'équation du second degré).
En utilisant le résultat de l'étape 1, on voit donc que la suite $v_{1,n} = u_{n+1} - r_1 u_n$ est géométrique de raison

$$q = a - r_1 = r_2\,.$$

Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{1,n} = v_{1,0}\,(r_2)^n$, c'est-à-dire

$$u_{n+1} - r_1 u_n = (u_1 - r_1 u_0) \times (r_2)^n\,. \tag{4}$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - r_2 u_n = (u_1 - r_2 u_0) \times (r_1)^n\,. \tag{5}$$

Par soustraction de (4) et (5), il vient

$$(r_1 - r_2)\,u_n = (u_1 - r_2 u_0) \times (r_1)^n - (u_1 - r_1 u_0) \times (r_2)^n\,.$$

Puisque $r_1 \neq r_2$, on peut diviser par $r_1 - r_2$, et on obtient

$$u_n = \frac{u_1 - r_2 u_0}{r_1 - r_2} \times (r_1)^n - \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_1 - r_2} \times (r_2)^n\,, \tag{6}$$

ce qui démontre le a) du théorème.

Etape 3 : On se place dans le cas où l'équation $r^2 = ar + b$ admet une racine double r_0. Alors $r_0 = \frac{a}{2}$.
En utilisant à nouveau le résultat de l'étape 1, on voit que $u_{n+1} - r_0 u_n$ est géométrique de raison $q = a - r_0 = \frac{a}{2} = r_0$.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - r_0 u_n = (u_1 - r_0 u_0)(r_0)^n$, c'est-à-dire

$$u_{n+1} = r_0 u_n + \lambda (r_0)^n, \quad \text{avec } \lambda = u_1 - r_0 u_0. \tag{7}$$

Si nous calculons les premiers termes de la suite u_n, nous voyons que

$$\begin{aligned}
u_1 &= r_0 u_0 + \lambda \\
u_2 &= r_0 u_1 + \lambda r_0 = r_0 (r_0 u_0 + \lambda) + \lambda r_0 = (r_0)^2 u_0 + 2\lambda r_0 \\
u_3 &= r_0 u_2 + \lambda (r_0)^2 = r_0 \left((r_0)^2 u_0 + 2\lambda r_0 \right) + \lambda (r_0)^2 = (r_0)^3 u_0 + 3\lambda (r_0)^2 .
\end{aligned}$$

La formule $u_n = (r_0)^n u_0 + n\lambda (r_0)^{n-1}$ est donc vraie aux rangs $n = 0, 1, 2$ et 3.
Montrons qu'elle est héréditaire. Si on a cette relation à un rang n quelconque, alors

$$u_{n+1} = r_0 u_n + \lambda (r_0)^n = r_0 \left((r_0)^n u_0 + n\lambda (r_0)^{n-1} \right) + \lambda (r_0)^n = (r_0)^{n+1} u_0 + (n+1)\lambda (r_0)^n .$$

On a donc vérifié par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = (r_0)^n u_0 + n\lambda (r_0)^{n-1} = (r_0)^n \left(u_0 + \frac{\lambda}{r_0} n \right) = (r_0)^n \left(u_0 + \frac{u_1 - r_0 u_0}{r_0} n \right), \tag{8}$$

ce qui démontre le b) du théorème.

Remarque : On notera que la démonstration du théorème en donne en fait une version *effective*, c'est-à-dire qu'elle permet d'exprimer le terme général u_n en fonction des solutions de l'équation caractéristique et des valeurs initiales u_0 et u_1 : voir les formules (6) et (8).