SOUS-ESPACES SUPPLEMENTAIRES

Ce complément, de nature abstraite, a pour but de définir et étudier les sommes de sous-espaces vectoriels. On notera que l'on se place ici dans un espace vectoriel général E, qui n'est pas nécessairement de dimension finie. Ainsi nous ne pouvons pas, a priori, introduire de base de E. Néanmoins, nous verrons qu'il est possible, dans certains cas, de décomposer tout vecteur u de E comme somme de deux autres vecteurs, éléments de sous-espaces vectoriels dits *supplémentaires*. Ceci conduit finalement à généraliser les notions de projection et symétrie à des espaces vectoriels abstraits quelconques. On se reportera au chapitre 47, page 619 de "Toutes les mathématiques" (TLM1) pour le cas particulier des projections et symétries orthogonales.

1 Somme de sous-espaces vectoriels

1.1 Définition et propriétés

Définition 1 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*. On appelle* somme *de* F *et de* G *l'ensemble, noté* $\mathsf{F}+\mathsf{G}$*, des vecteurs qui sont la somme d'un vecteur de* F *et d'un vecteur de* G :

$$\mathsf{F}+\mathsf{G}=\{u\in\mathsf{E}\ /\ u=f+g,\ f\in\mathsf{F},g\in\mathsf{G}\}.$$

En d'autres termes, les vecteurs de la somme $\mathsf{F}+\mathsf{G}$ sont caractérisés par

$$u\in\mathsf{F}+\mathsf{G}\Longleftrightarrow\exists f\in\mathsf{F},\exists g\in\mathsf{G}\quad\text{tels que}\ \ u=f+g. \tag{1}$$

Remarque 1 La somme $\mathsf{F}+\mathsf{G}$ des sous-espaces vectoriels F et G est donc un ensemble. Cet ensemble contient F. En effet, si $f\in\mathsf{F}$, alors $f=f+0\in\mathsf{F}+\mathsf{G}$ car $0\in\mathsf{G}$. Ainsi $\mathsf{F}\subset\mathsf{F}+\mathsf{G}$.

Exemple 1 Dans l'espace vectoriel $\mathsf{E}=\mathbb{R}^3$, considérons deux droites vectorielles D_1 et D_2 sécantes, c'est-à-dire telles que $D_1\cap D_2=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$:

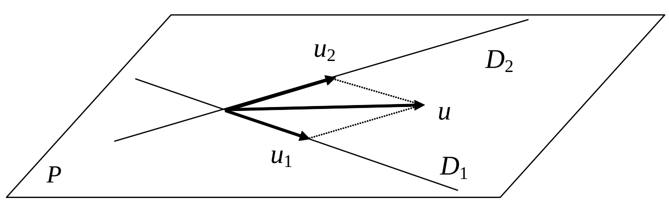

Figure 1

La figure 1 montre clairement que D_1+D_2 est le plan vectoriel P contenant D_1 et D_2. En effet :

- $D_1+D_2\subset\mathsf{P}$ car la somme d'un vecteur de D_1 et d'un vecteur de D_2 appartient évidemment à P.

- $\mathsf{P}\subset D_1+D_2$ car tout vecteur u de P s'écrit sous la forme u_1+u_2 par la règle du parallélogramme, avec $u_1\in D_1$ et $u_2\in D_2$.

Théorème 1 *La somme* $\mathsf{F}+\mathsf{G}$ *de deux sous-espaces vectoriels* F et G *d'un espace vectoriel* E *est un sous-espace vectoriel de* E.

Démonstration On utilise le théorème 45.1 de TLM1. On a

- $\mathsf{F}+\mathsf{G}\subset\mathsf{E}$ puisque tout élément h de $\mathsf{F}+\mathsf{G}$ s'écrit $h=f+g$, avec f dans F (donc dans E) et g dans G (donc dans E), et que la somme de deux éléments de E est un élément de E.

- Le vecteur nul 0 est dans $\mathsf{F}+\mathsf{G}$: en effet $0=0+0$ avec $0\in\mathsf{F}$ et $0\in\mathsf{G}$, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

- Si u et v sont dans H et si λ et μ sont des scalaires, on peut écrire $u=f_1+g_1$ et $v=f_2+g_2$, avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G. Alors $\lambda u+\mu v=(\lambda f_1+\mu f_2)+(\lambda g_1+\mu g_2)$. Or F est un sous-espace vectoriel de E, donc $\lambda f_1+\mu f_2\in\mathsf{F}$. De même, $\lambda g_1+\mu g_2\in\mathsf{G}$. Ainsi $\lambda u+\mu v\in\mathsf{F}+\mathsf{G}$.

Exemple 2 Soient u_1, u_2, u_3 trois vecteurs de l'espace vectoriel E.
Que peut-on dire de la somme $\text{Vect}(u_1, u_2) + \text{Vect}(u_3)$? On a

$$u \in \text{Vect}(u_1, u_2) + \text{Vect}(u_3) \iff \exists f \in \text{Vect}(u_1, u_2), \exists g \in \text{Vect}(u_3), \text{ tels que } u = f + g.$$

Or, on sait que $f \in \text{Vect}(u_1, u_2) \iff \exists (a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que $f = a_1 u_1 + a_2 u_2$ et $g \in \text{Vect}(u_3) \iff \exists a_3 \in \mathbb{K}$ tel que $g = a_3 u_3$. On en déduit donc finalement que

$$\begin{aligned} u \in \text{Vect}(u_1, u_2) + \text{Vect}(u_3) &\iff \exists (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{K}^3 \text{ tel que } u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \\ &\iff u \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3). \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\text{Vect}(u_1, u_2) + \text{Vect}(u_3) = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

1.2 Somme directe

Il existe deux types de sommes de sous-espaces vectoriels :

a) Dans l'exemple de la figure 1, on conçoit bien que tout vecteur du plan va se décomposer *de manière unique* comme la somme d'un vecteur de D_1 et d'un vecteur de D_2. En effet, lorsque u est donné dans P, u_1 et u_2 sont imposés par la règle du parallélogramme.

b) Par contre si P et P' sont les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ d'équations respectives $x = 0$ et $y = 0$, on remarque qu'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire de plusieurs façons comme la somme d'un vecteur de P et d'un vecteur de P'. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Cette deuxième situation correspond à la figure 2 ci-dessous, qui montre plus généralement deux plans P et P' sécants, dont l'intersection est une droite vectorielle D.

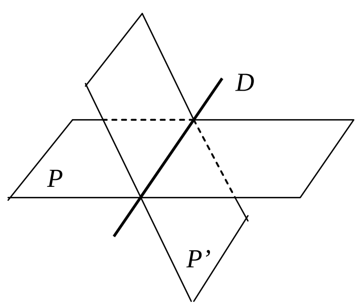

Figure 2

Définition 2 *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *On dit que la somme* $F + G$ *est* directe *si tout vecteur de* $F + G$ *se décompose* de manière unique *comme la somme d'un élément de* F *et d'un élément de* G.

Lorsque F et G sont en somme directe, on note $F + G = F \oplus G$. Pratiquement, les sous-espaces vectoriels en somme directe sont caractérisés par le

Théorème 2 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Alors :*

$$F + G \text{ est directe} \iff F \cap G = \{0\}.$$

Démonstration Supposons la somme $F + G$ directe. Soit $u \in F \cap G$. On peut alors écrire $u = 0 + u$, avec $0 \in F$ et $u \in G$, et on a aussi $u = u + 0$ avec $u \in F$ et $0 \in G$. Puisque la somme $F + G$ est directe, la décomposition de u suivant F et G est unique et ainsi $u = 0$. Ceci prouve que le seul vecteur qu'on puisse trouver dans $F \cap G$ est le vecteur nul, c'est-à-dire que $F \cap G \subset \{0\}$. Mais l'inclusion inverse est vraie puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Donc $F \cap G = \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $F \cap G = \{0\}$ et montrons que la somme $F + G$ est directe. Supposons que l'on ait

$$u = f_1 + g_1 = f_2 + g_2, \tag{2}$$

avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G. Alors $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$. Puisque $f_1 - f_2 \in F$ et $g_2 - g_1 \in G$, le vecteur $v = f_1 - f_2 = g_2 - g_1$ appartient à $F \cap G$. Puisque $F \cap G = \{0\}$, on a donc $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 = 0$, ce qui assure que $f_1 = f_2$ et $g_1 = g_2$. Ainsi, l'écriture (2) de u comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique, ce qui signifie que la somme $F + G$ est directe.

Exemple 3 Deux droites sécantes du plan $\mathbb{R}^2$ ou de l'espace $\mathbb{R}^3$ sont en somme directe puisque leur intersection est réduite au vecteur nul (figure 1). Deux plans sécants de l'espace $\mathbb{R}^3$ ne peuvent être en somme directe puisque leur intersection est une droite et ne contient donc pas que le vecteur nul (figure 2).

1.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 3 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*. On dit que* F *et* G *sont* supplémentaires *dans* E *si la somme* $F + G$ *est directe et si celle-ci vaut* E*. On a donc :*

$$(F \text{ et } G \textit{ supplémentaires dans } E) \Longleftrightarrow E = F \oplus G.$$

On dit aussi que G *est* un supplémentaire *de* F *dans* E.

La caractérisation des sous-espaces en somme directe donnée par le théorème 2 se traduit immédiatement par le

Théorème 3 *Soient* F *et* G *sont deux sous-espaces vectoriels de* E*. Alors* F et G *sont supplémentaires dans* E *si et seulement si, pour tout* $u \in E$, il existe un couple unique *de vecteurs* $f \in F$ *et* $g \in G$ *tels que* $u = f + g$.

Remarque 2 Les théorèmes 2 et 3 sont très proches et il convient de ne pas confondre la notion d'espaces en somme directe avec la notion d'espaces supplémentaires dans un autre. Par exemple, deux droites sécantes de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires dans le plan qui les contient (figure 1), mais pas dans l'espace $\mathbb{R}^3$: en effet, leur somme est directe et vaut exactement le plan $P = D_1 \oplus D_2$, et non l'espace tout entier.

Remarque 3 Un sous-espace possède plusieurs supplémentaires. Par exemple, si D_1, D_2, D_3 sont trois droites deux à deux sécantes de $E = \mathbb{R}^2$, alors D_2 et D_3 sont des supplémentaires de D_1 dans $\mathbb{R}^2$ puique $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$ et $D_1 \oplus D_3 = \mathbb{R}^2$.

Exemple 4 Soit $E = \mathbb{R}^3$. On demande de vérifier que $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + z = 0\right\}$ et $G = \left\{(x,x,x) \in \mathbb{R}^3\right\}$ sont supplémentaires dans E.

On sait d'abord que F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (théorème 43.5 de TLM1), donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De même le vecteur $u = (x,y,z) \in G$ si et seulement si $y = x$ et $z = x$. Ainsi G est l'intersection des plans vectoriels d'équations $x - y = 0$ et $x - z = 0$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (en fait, la droite vectorielle engendrée par (1,1,1)).

Pour montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, il faut vérifier que tout vecteur $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, f_3)$ de F et d'un vecteur $\overrightarrow{g} = (g_1, g_2, g_3)$ de G.

Nous devons donc résoudre l'équation $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$, *d'inconnues* f *et* g, *et montrer qu'elle admet une solution unique.*

Or, $\overrightarrow{f} \in F \Longleftrightarrow f_2 = f_1 + f_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{f} = (f_1, f_1 + f_3, f_3)$.

De même $\overrightarrow{g} \in G \Longleftrightarrow \overrightarrow{g} = (g_1, g_1, g_1)$. On a donc :

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + g_1 = x_1 \\ f_1 + g_1 + f_3 = x_2 \\ f_3 + g_1 = x_3 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f_1 + g_1 = x_1 \\ f_3 = x_2 - x_1 \\ g_1 = x_3 - f_3 = x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$$

On voit donc que ce système admet une unique solution donnée par :

$$\begin{cases} f_1 = x_1 - g_1 = x_2 - x_3 \\ f_3 = x_2 - x_1 \\ g_1 = x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$$

Ceci signifie donc que les vecteurs $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ recherchés existent et qu'ils sont uniques. On a bien prouvé que $\mathbb{R}^3 = \mathsf{F} \oplus \mathsf{G}$. Cette situation est schématisée dans la figure 3 :

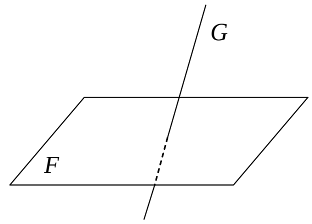

Figure 3

Exemple 5 Soit $\mathsf{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Vérifier que $\mathsf{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \text{ est paire}\}$ et $\mathsf{G} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \text{ est impaire}\}$ sont supplémentaires dans E.

On a déjà vu dans l'exemple 45.11 de TLM1 que F est un sous-espace vectoriel de E. On prouve de même que G est un sous-espace vectoriel de E. Il nous reste à vérifier que tout élément de E se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G, ce qui revient à prouver que toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire d'une seule façon comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Contrairement à l'exemple précédent, ceci ne débouche pas sur un système d'équations à résoudre. Nous allons ici procéder à l'aide d'un raisonnement par analyse et synthèse :

Analyse du problème : Supposons que l'on puisse écrire $f = p + i$ avec p paire et i impaire, et essayons d'exprimer p et i en fonction de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'abord

$$f(x) = p(x) + i(x). \tag{3}$$

Puisque $p(-x) = p(x)$ et $i(-x) = -i(x)$, on a aussi, pour tout réel x,

$$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x). \tag{4}$$

En ajoutant et soustrayant membre à membre (3) et (4), il vient

$$p(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right] \ ; \ i(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right] \tag{5}$$

Cette analyse du problème nous permet donc de conclure que, *si* la décomposition de f en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire est possible, *alors celle-ci est unique* puisqu'on a trouvé une seule valeur posible de $p(x)$ et de $i(x)$. Il nous reste simplement à *vérifier* que les fonctions données par (5) répondent bien aux exigences du problème posé, c'est-à-dire que p est paire, que i est impaire et que $p + i = f$:

Synthèse du problème : Partant de f fonction quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soient p et i définies par (5).

On a bien $p(x) + i(x) = f(x)$, c'est-à-dire $f = p + i$.

De plus, on a $p(-x) = \frac{1}{2}\left[f(-x) + f(x)\right] = p(x)$, donc p est paire.

On vérifie de même que i est impaire. Ainsi, F et G sont supplémentaires dans E.

Remarque 4 La fonction p définie en (5) s'appelle la *partie paire* de f et i est sa *partie impaire*. Vous en connaissez un exemple simple : la fonction ch est la partie paire de la fonction exponentielle, et sh en est la partie impaire. En effet, pour tout x réel on a $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$.

2 Projections et symétries

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. On a donc $\mathsf{E} = \mathsf{F} \oplus \mathsf{G}$, ce qui signifie que tout vecteur x de E s'écrit, *de manière unique*, sous la forme $x = x_\mathsf{F} + x_\mathsf{G}$, où $x_\mathsf{F} \in \mathsf{F}$ et $x_\mathsf{G} \in \mathsf{G}$ (figure 4).

Définition 4 *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans* E. *On appelle projection sur* F *parallèlement à* G *l'application* p *définie par :*

$$\text{Si } x = x_\mathsf{F} + x_\mathsf{G}, \text{ où } x_\mathsf{F} \in \mathsf{F} \text{ et } x_\mathsf{G} \in \mathsf{G}, \text{ alors } p(x) = x_\mathsf{F}.$$

Il est clair que, si on note $q = \mathrm{Id}_E - p$ alors $q(x) = x - p(x) = x_G$ est la projection sur G parallèlement à F.

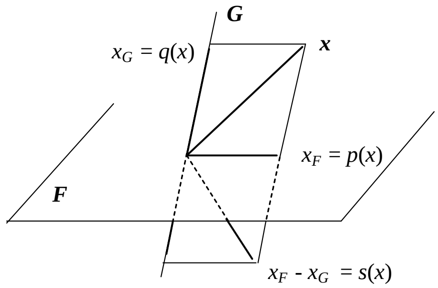

Figure 4

Définition 5 *On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application s définie par*

$$s(x) = x_F - x_G.$$

Ainsi $s(x) = p(x) - q(x) = p(x) - [x - p(x)] = 2p(x) - x$. Donc

$$s = 2p - \mathrm{Id}_E. \tag{6}$$

Remarque 5 Les projections et symétries orthogonales d'un espace vectoriel euclidien E (page 619 de TLM1) sont des cas particuliers de projections et symétries. En effet, il est clair que, pour tout sous-espace vectoriel F de E, F et $F^{\perp}$ sont en somme directe dans E, c'est-à-dire que $E = F \oplus F^{\perp}$.

Théorème 4 *Projections et symétries sont des endomorphismes de E.*

Démonstration Considérons deux vecteurs x et y, que l'on décompose sous la forme $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a

$$\lambda x + \mu y = \underbrace{(\lambda x_F + \mu y_F)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda x_G + \mu y_G)}_{\in G}$$

donc $p(\lambda x + \mu y) = \lambda x_F + \mu y_F = \lambda p(x) + \mu p(y)$. Ceci prouve la linéarité de p. On démontre de même que $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ est linéaire.

Les projections vérifient les propriétés suivantes :

Théorème 5 *Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors* $p^2 = p$, $\operatorname{Ker} p = F$ et $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - p) = G$.

De même pour les symétries on a :

Théorème 6 *Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors* $s^2 = \mathrm{Id}_E$, $\operatorname{Ker}(s - i) = F$ et $\operatorname{Ker}(s + i) = G$.

Démonstration Démontrons par exemple que, pour une symétrie s, on a $\operatorname{Ker}(s - i) = F$. Pour tout vecteur x de F, on a d'abord $s(x) = x$, donc $s(x) - x = 0$, ou encore $(s - \mathrm{Id}_E)(x) = 0$. Ainsi $x \in \operatorname{Ker}(s - i)$. Ceci prouve que $F \subset \operatorname{Ker}(s - i)$.

Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker}(s - i)$. Soit $x = x_F + x_G$ la décomposition de x comme somme d'un unique élément de F et d'un unique élément de G. On a $s(x) = x_F - x_G = x$ (puisque $x \in \operatorname{Ker}(s - i)$). Donc $x_F - x_G = x_F + x_G$, c'est-à-dire $x_G = 0$. On en déduit que $x = x_F \in F$. Donc $\operatorname{Ker}(s - i) \subset F$.

On a donc démontré que $F = \operatorname{Ker}(s - i)$ par double inclusion.

Exercices

Exercice 1 Vérifier dans chacun des cas suivants que F et G sont 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :
1) $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x, y, z, t) \in E \ / \ x + y + z = 0\}$, $G = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u} = (1, 1, 1, 1)\right)$.
2) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ {}^tA = A\}$, $G = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ {}^tA = -A\}$.
3) $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \mathbb{R}_1[X]$.
4) $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \text{Vect}\left(x \longmapsto x^2\right)$, $G = \{f \in E \ / \ f(-1) = 0\}$.

Exercice 2 Pour tout réel a, on note P_a l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont périodiques de période a.
1) Vérifier que P_a est un espace vectoriel.
2) Les ensembles $P_{\frac{2\pi}{3}}$ et $P_{\frac{\pi}{2}}$ sont-ils en somme directe ?

Exercice 3 Soit $E = \left\{P \in \mathbb{R}[x] \ / \ \int_0^1 xP(x)\,dx = 0\right\}$.
1) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$.
2) Soit $B_1(x) = x$. Démontrer que E et $\text{Vect}(B_1)$ sont en somme directe.

Exercice 4 Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{\{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0\right\}$ et $G = \text{Vect}\,[(2, -1, 0)]$.
1) Démontrer que $E = F \oplus G$.
2) Déterminer la matrice P, dans la base canonique de E,de la projection p sur F parallèlement à G.
3) En déduire la matrice S, dans la base canonique de E,de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^{\,2} = \text{Id}$, où Id désigne l'identité dans E. Démontrer que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id})$.

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^{\,2} - 3f - 4\text{Id} = 0$, où Id désigne l'identité dans E. Démontrer que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 4\text{Id})$.

Exercice 7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $b \in E$ donné. Soit p un projecteur de E donné. Résoudre l'équation d'inconnue x : $x + p(x) = b$.

Exercice 8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $b \in E$ donné. Soit s une symétrie de E donnée. Résoudre l'équation d'inconnue x : $x + 2s(x) = b$.

Exercice 9 Soient E un espace vectoriel, A, B, C trois sous-espaces de E. Montrer que si $A + C = B + C$, $A \cap C = B \cap C$ et $A \subset B$, alors $A = B$.

Exercice 10 Soient E un espace vectoriel, A, B, C trois sous-espaces de E.
1) Montrer que $A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C)$. A l'aide d'un contre-exemple choisi dans le plan $\mathbb{R}^2$, montrer que l'inclusion inverse est fausse.
2) Vérifier qu'il existe une inclusion entre les deux ensembles $A \cap (B + C)$ et $(A \cap B) + (A \cap C)$. Infirmer l'autre inclusion en s'aidant d'un contre-exemple.

Exercice 11 On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \left\{P \in E,\ \int_0^1 P(t)\,dt = 0\right\}$, $G = \text{Vect}\left(1 + X + X^2\right)$.
1) Démontrer que $E = F \oplus G$.
2) Soit p la projection sur F parallèlement à G. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer $p(P)$ en fonction de $\int_0^1 P(t)\,dt$.

Exercice 12 Soient E un espace vectoriel et F, G, C trois sous-espaces vectoriels de E tels que C soit un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Montrer que $F + G = F \oplus C$.

Solutions des exercices

Exercice 1 1) F et G sont deux sous-espaces vectoriels (hyperplan et droite vectorielle) de E. Il reste alors à vérifier que tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme la somme d'un vecteur de F avec un vecteur de G :

On a $\overrightarrow{f} = (a,b,c,d) \in F \iff a = -b-c \iff \overrightarrow{f} = (-b-c,b,c,d)$.

$\overrightarrow{g} \in G \iff \exists e \in \mathbb{R}$ tel que $g = e(1,1,1,1) = (e,e,e,e)$. Posons $\overrightarrow{u} = (x,y,z,t)$ un vecteur quelconque de E. Cherchons s'il est possible d'écrire $\overrightarrow{u}$ comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On résout le système d'inconnues b,c,d,e :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g} \iff \left\{ \begin{array}{c} -b-c+e = x \\ b+e = y \\ c+e = z \\ d+e = t \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} -b-c+e = x \\ b = y-e \\ c = z-e \\ d = t-e \end{array} \right.$$

En remplaçant b et c par leurs valeurs dans la première équation, il vient $3e-y-z = x$ d'où $e = \dfrac{1}{3}(x+y+z)$. En réinjectant dans les trois dernières équations, on voit donc que le système admet une seule solution, ce qui signifie qu'on peut toujours décomposer un vecteur $\overrightarrow{u}$ de E comme la somme d'un vecteur $\overrightarrow{f}$ de F avec un vecteur $\overrightarrow{g}$ de G et ce, de manière unique. On a donc prouvé que F et G sont supplémentaires dans E.

2) On observe que F est le sous-espace vectoriel des matrices symétriques, tandis que G est le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques. Traitons le problème par analyse et synthèse :

Analyse : Supposons que la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrive :

$$M = S + A, \tag{7}$$

avec $S \in F$ et $A \in G$. On aura alors ${}^tS = S$ et ${}^tA = -A$. La relation $M = S + A$ donne

$${}^tM = {}^t(S+A) = {}^t(S) + {}^t(A) = S - A. \tag{8}$$

En ajoutant et soustrayant (7) et (8), il vient $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

Ainsi, S et A, si elles existent, sont uniques.

Synthèse : Partant d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, posons $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$. On a alors clairement $S + A = M$. De plus, on a ${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S$ et de même, on a ${}^tA = -A$. Ainsi, il est bien possible d'écrire une matrice quelconque, de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Conclusion : F et G sont bien supplémentaires dans E.

3) Puisque F est l'ensemble des polynômes admettant 1 et 2 pour racines, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes de la forme $A(X)(X-1)(X-2)$, dire que F et G sont supplémentaires dans E revient ici à affirmer que tout polynôme P s'écrit de manière unique sous la forme $P(X) = A(X)(X-1)(X-2) + B(X)$ avec $\deg B \leq 1$. Or ce résultat découle directement du théorème de la division euclidienne : la division de P par $(X-1)(X-2)$ s'écrit en effet

$$\exists!\,(Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2 \text{ tel que } P(X) = Q(X)(X-1)(X-2) + R(X)$$

avec $\deg R < 2$, donc $\deg R \leq 1$. Les espaces F et G sont donc supplémentaires dans E.

4) On veut prouver que toute fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique sous la forme $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

Analyse : Supposons que l'on ait $h = f + g$ avec $f(x) = ax^2$ et $g(-1) = 0$. On a donc $h(-1) = f(-1) + g(-1) = a$. Ainsi, a est unique. On a aussi $g(x) = h(x) - ax^2$ défini de manière unique.

Synthèse : Partant de h, fonction quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, posons $a = h(-1)$. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 = h(-1)x^2$ et $g(x) = h(x) - f(x) = h(x) - h(-1)x^2$. On a alors clairement :

a) $f + g = h$;

b) $g(-1) = h(-1) - h(-1)(-1)^2 = 0$ donc $g \in G$;

c) Puisque $f(x) = ax^2$, $f \in F$.

Conclusion **:** F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 2 1) P_a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ puisque $P_a \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $P_a \neq \emptyset$ puisque la fonction nulle est périodique de période a donc est dans P_a. Enfin, si f et g sont deux fonctions de P_a, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+a) = f(x)$ et $g(x+a) = g(x)$. Donc, pour tous réels λ et μ, on a

$$(\lambda f + \mu g)(x+a) = \lambda f(x+a) + \mu g(x+a) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x),$$

ce qui signifie que $\lambda f + \mu g$ est périodique de période a, c'est-à-dire que $\lambda f + \mu g \in P_a$.

2) Les ensembles $P_{\frac{2\pi}{3}}$ et $P_{\frac{\pi}{2}}$ ne sont pas en somme directe, puisque $P_{\frac{2\pi}{3}} \cap P_{\frac{\pi}{2}} \neq \{0\}$. En effet, $P_{\frac{2\pi}{3}} \cap P_{\frac{\pi}{2}}$ est l'ensemble des fonctions qui sont à la fois $\frac{2\pi}{3}$ périodiques et $\frac{\pi}{2}$ périodiques. Les fonctions périodiques de période $\frac{\pi}{6}$ sont donc dans $P_{\frac{2\pi}{3}} \cap P_{\frac{\pi}{2}}$ car $\frac{\pi}{2} = 3 \times \frac{\pi}{6}$ et $\frac{2\pi}{3} = 4 \times \frac{\pi}{6}$.

Exercice 3 1) On a clairement $E \subset \mathbb{R}[x]$ et $0 \in E$. Montrons que E est stable par combinaison linéaire. Soient P et Q deux éléments de E ; ils vérifient donc la propriété caractéristique des éléments de E, c'est-à-dire

$$\int_0^1 xP(x)\,dx = 0 \text{ et } \int_0^1 xQ(x)\,dx = 0. \tag{9}$$

Soient a et b deux réels, il s'agit de montrer que $aP + bQ \in E$, c'est-à-dire vérifie la propriété caractéristique des éléments de E. On calcule donc :

$$\int_0^1 x(aP+bQ)(x)\,dx = \int_0^1 x[aP(x) + bQ(x)]\,dx = a\int_0^1 xP(x)\,dx + b\int_0^1 xQ(x)\,dx.$$

En utilisant (9), on obtient $\int_0^1 x(aP+bQ)(x)\,dx = 0$. Donc $aP + bQ \in E$, et E est un sev de $\mathbb{R}[x]$.

2) Soit $P \in E \cap \text{Vect}(B_1)$. Cela signifie que $P \in E$ et $P \in \text{Vect}(B_1)$.

Puisque $P \in \text{Vect}(B_1)$, $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $P = aB_1$, d'où $P(x) = aB_1(x) = ax$.

Puisque $P \in E$, P vérifie la propriété caractéristique des éléments de E. Donc

$$\int_0^1 xP(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 x.ax\,dx = 0 \Leftrightarrow a\int_0^1 x^2\,dx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}a = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Puisque $P(x) = ax$, il vient $P(x) = 0$. Ainsi le seul polynôme qui soit à la fois dans E et dans $\text{Vect}(B_1)$ est le polynôme nul. Donc $E \cap \text{Vect}(B_1) = \{0\}$, ce qui signifie que E et $\text{Vect}(B_1)$ sont en somme directe.

Exercice 4 1) F est un plan vectoriel, donc de dimension 2, G est de dimension 1. On a donc $\dim \mathbb{R}^3 = \dim F + \dim G$. De plus, le vecteur directeur de G n'est pas dans F. Donc $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. On en déduit que $E = F \oplus G$.

2) Pour déterminer l'expression de la projection p, on détermine la matrice de p dans une "bonne" base (voir notamment l'exemple 44.11 de TLM1).

Une base de F est $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ obtenue en exprimant z en fonction de x et y.

Le vecteur $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ est une base de G.

Ainsi $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de E. La matrice de P dans cette base est $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

D'après les formules de changement de base, la matrice de p dans la base canonique est

$$P = \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-1&-2&2\\1&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(le calcul de l'inverse de la matrice de passage est laissé au lecteur).

3) On sait que $s = 2p - x$, donc $S = 2P - I_3$, c'est-à-dire

$$S = 2\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 Dire que $x \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ revient à dire que $(f + \mathrm{Id})(x) = 0$, c'est-à-dire que $f(x) + x = 0$, ou encore $f(x) = -x$. De même $x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \Leftrightarrow f(x) = x$. Procédons par analyse et synthèse :

Analyse : pour tout $x \in E$, on cherche à écrire x sous la forme $x = y + z$, avec $y \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $z \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Alors on a nécessairement : $f(x) = f(y) + f(z) = -y + z$. En additionnant et soustrayant l'expression de x et celle de $f(x)$, on obtient

$$y = \frac{1}{2}(x - f(x)) \ ; \ z = \frac{1}{2}(x + f(x)). \tag{10}$$

Donc si x se décompose sous la forme de la somme d'un élément de $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et d'un élément de $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$, cette décomposition est unique et elle est donnée par (10).

Synthèse : vérifions que y et z définis par (10) répondent au problème posé. On a d'abord $y + z = x$. Par ailleurs

$$f(y) = \frac{1}{2}\left[f(x) - f^2(x)\right] = \frac{1}{2}[f(x) - x] = -y.$$

Donc $y \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$. De même $f(z) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f^2(x)\right] = \frac{1}{2}[f(x) + x] = z$.

Donc $z \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Ainsi tout $x \in E$ se décompose, de manière unique, comme la somme d'un élément $y \in \ker(f + \mathrm{Id})$ et d'un élément $z \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$, la décomposition étant donnée par $(**)$. Donc $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 6 On procède de même. Dire que $x \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ revient à dire que $f(x) = -x$. Et $x \in \operatorname{Ker}(f - 4\mathrm{Id}) \Leftrightarrow f(x) = 4x$.

Analyse : si $x = y + z$, avec $y \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $z \in \operatorname{Ker}(f - 4\mathrm{Id})$. Alors on a : $f(x) = f(y) + f(z) = -y + 4z$. On obtient donc :

$$y = \frac{1}{5}(4x - f(x)) \ ; \ z = \frac{1}{5}(x + f(x)). \tag{11}$$

Donc si x se décompose sous la forme de la somme d'un élément de $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et d'un élément de $\operatorname{Ker}(f - 4\mathrm{Id})$, cette décomposition est unique et elle est donnée par (11).

Synthèse : on vérifie que y et z définis par (11) répondent au problème posé. On a d'abord $y + z = x$. Par ailleurs, puisque $f^2 = 3f + 4$,

$$f(y) = \frac{1}{5}\left[4f(x) - f^2(x)\right] = \frac{1}{5}[4f(x) - 3f(x) - 4x] = \frac{1}{5}[f(x) - 4x] = -y.$$

Donc $y \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$. De même $f(z) = \frac{1}{5}\left[f(x) + f^2(x)\right] = \frac{1}{5}[f(x) + 3f(x) + 4x] = 4z$.

Donc $z \in \operatorname{Ker}(f - 4\mathrm{Id})$. Ainsi tout $x \in E$ se décompose, de manière unique, comme la somme d'un élément $y \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et d'un élément $z \in \operatorname{Ker}(f - 4\mathrm{Id})$, la décomposition étant donnée par (11). Donc $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(f - 4\mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 7 On sait que, pour tout projecteur, $p^2 = p$. Si $x + p(x) = b$, alors

$$p(x + p(x)) = p(b) \Rightarrow p(x) + p^2(x) = p(b) \Rightarrow p(x) = \tfrac{1}{2}p(b).$$

En reportant dans l'équation de départ, on obtient $x = b - p(x) = b - \frac{1}{2}p(b)$.

Donc, si x est solution de l'équation de départ, alors x a cette valeur. Réciproquement,

$$x + p(x) = b - \frac{1}{2}p(b) + p(b) - \frac{1}{2}p^2(b) = b - \frac{1}{2}p(b) + p(b) - \frac{1}{2}p(b) = b.$$

Donc l'équation $x + p(x) = b$ admet une solution et une seule : $x = b - \frac{1}{2}p(b)$.

Exercice 8 Pour tout projecteur, $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Si $x + 2s(x) = b$, alors

$$s(x + 2s(x)) = s(b) \Rightarrow s(x) + 2s^2(x) = s(b) \Rightarrow s(x) + 2x = s(b).$$

En multipliant par 2 et en soustrayant à l'équation de départ, il vient $x = \frac{1}{3}[2s(b) - b]$.

Si x est solution de l'équation de départ, alors x a cette valeur. Réciproquement,

$$x + 2s(x) = \frac{1}{3}[2s(b) - b] + \frac{2}{3}\left[2s^2(b) - s(b)\right] = \frac{1}{3}[2s(b) - b] + \frac{2}{3}[2b - s(b)] = b.$$

Donc l'équation $x + 2s(x) = b$ a pour unique solution $x = b - \frac{1}{2}p(b)$.

Exercice 9 On sait déjà que $A \subset B$, il reste donc à montrer que $B \subset A$. Soit donc $b \in B$. On a $b = b + 0 \in B + C$ car C est un sous-espace vectoriel de E, donc $0 \in C$. Puisque $B + C = A + C$, on peut donc écrire $b = a + c$, avec $a \in A$ et $c \in C$. On aimerait obtenir que $b \in A$, il suffirait donc que $c \in A$. Or, on a $c = b - a$ avec $b \in B$ et $a \in A \subset B$. Puisque B est un sous-espace vectoriel de E, on a donc $c \in B$. Or, on sait que $c \in C$ donc $c \in C \cap B$ qui, par hypothèse, vaut $C \cap A$. Finalement, $c \in A$ et donc $b = a + c \in A$.

Exercice 10 1) Soit $x \in A + (B \cap C)$ On peut donc écrire $x = a + y$ avec $a \in A$ et $y \in B \cap C$. Puisque $y \in B$, alors $x = a + y \in A + B$ et puisque $y \in C$, alors $x = a + y \in A + C$. Finalement, on a $x \in (A + B) \cap (A + C)$ et donc on vient de montrer que $A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C)$.

Pour l'inclusion réciproque, cinsidérons l'exemple suivant : si A, B et C sont trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ telles que leurs intersections deux à deux soient réduites au vecteur nul, alors on a :

$A + (B \cap C) = A + \left\{\overrightarrow{0}\right\} = A \neq (A + B) \cap (A + C) = \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2.$

L'inclusion réciproque est donc fausse.

2) Soit $x \in (A \cap B) + (A \cap C)$. On peut donc écrire $x = b + c$ avec $b \in A \cap B$ et $c \in A \cap C$. Puisque b et c sont dans A, alors $x = b + c \in A$. Puisque $b \in B$ et $c \in C$, alors $x = b + c \in B + C$. Ainsi $x \in A \cap (B + C)$, et $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$.

En reprenant l'exemple de la question précédente, on a

$A \cap (B + C) = A \cap P = A \neq (A \cap B) + (A \cap C) = \left\{\overrightarrow{0}\right\} + \left\{\overrightarrow{0}\right\} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}.$

Exercice 11 1) Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, cherchons à décomposer :

$$P(x) = a\left(x^2 + x + 1\right) + Q(x) \tag{12}$$

avec $\int_0^1 Q(x)\,dx = 0$. En intégrant (12) entre 0 et 1, on obtient $\int_0^1 P(x)\,dx = a\int_0^1 \left(x^2 + x + 1\right) dx = \frac{11}{6}a$.

Ainsi $a = \frac{6}{11}\int_0^1 P(x)\,dx$ et $Q(x) = P(x) - \frac{6}{11}\left(\int_0^1 P(x)\,dx\right)\left(x^2 + x + 1\right)$.

Donc, si la décomposition de P comme somme d'un élément K de F et d'un élément Q de G existe, celle-ci est unique et elle est donnée par

$$H(x) = \left(\frac{6}{11}\int_0^1 P(x)\,dx\right)\left(x^2 + x + 1\right) ;\ Q(x) = P(x) - \frac{6}{11}\left(\int_0^1 P(x)\,dx\right)\left(x^2 + x + 1\right).$$

Réciproquement, on a bien $H \in F$ et $H + Q = P$. Il reste à prouver que $Q \in G$. Or :

$$\int_0^1 Q(x)\,dx = \int_0^1 \left[P(x) - \frac{6}{11}\left(\int_0^1 P(x)\,dx\right)\left(x^2 + x + 1\right)\right] dx = \int_0^1 P(x)\,dx - \frac{6}{11}\left(\int_0^1 P(x)\,dx\right)\int_0^1 \left(x^2 + x + 1\right) dx = 0.$$

Donc on a bien $E = F \oplus G$.

2) D'après ce qui précède, on a $p(P) = Q$.

Exercice 12 On suppose donc que $G = (F \cap G) \oplus C$. Ainsi, C est un sous-espace vectoriel de G. On a alors $C \subset G$ et donc $F \cap C = F \cap (C \cap G) = (F \cap G) \cap C$. Or,on sait que la somme $(F \cap G) + C$ est directe et donc $(F \cap G) \cap C = \{0\}$. Ceci implique que $F \cap C = \{0\}$, c'est-à-dire que la somme $F + C$ est directe.

Il nous reste à prouver que $F + G = F + C$. L'inclusion $F + C \subset F + G$ provient simplement du fait que $C \subset G$. Pour l'inclusion inverse, soit $x \in F + G$. On peut donc l'écrire $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Or, $G = (F \cap G) \oplus C$, on peut donc écrire $g = f_2 + c$ avec $f_2 \in F \cap G$ et $c \in C$. On a donc $x = (f + f_2) + c \in F + C$.