PRODUIT VECTORIEL

Le but de ce complément est de démontrer le résultat suivant, que nous avons admis dans TLM1 :

Le produit vectoriel est distributif à gauche et à droite sur l'addition, c'est-à-dire que, pour tout triplet de vecteurs $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)$, *on a* $\overrightarrow{u}\wedge\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}$ et $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\wedge\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}$ (il s'agit du théorème 8.3, page 89 de TLM1).

La démonstration de la première de ces formules se fonde sur la linéarité des projections orthogonales, des homothéties et des rotations (TLM1, pages 570 à 572). En effet, on peut d'abord supposer que $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$, car sinon le résultat est évident. Dans ce cas, la définition du produit vectoriel $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ peut se traduire par la réalisation des opérations suivantes :

1) On projette le vecteur $\overrightarrow{v}$ sur le plan (P) orthogonal à $\overrightarrow{u}$. On a alors

$$\left\|\overrightarrow{v}\,'\right\|=\left\|\overrightarrow{v}\right\|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\left\|\overrightarrow{v}\right\|\sin\theta.$$

2) On multiplie $\overrightarrow{v}\,'$ par $\left\|\overrightarrow{u}\right\|$. Alors $\left\|\overrightarrow{v}''\right\|=\left\|\overrightarrow{u}\right\|\left\|\overrightarrow{v}\right\|\sin\theta$.

3) Le plan (P) étant orienté par la règle du tire-bouchon [le sens positif de rotation dans (P) fait progresser le tire-bouchon dans la direction de $\overrightarrow{u}$], on fait tourner le vecteur $\overrightarrow{v}''$ de $+\dfrac{\pi}{2}$. On obtient $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$.

Ainsi $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ s'obtient en transformant $\overrightarrow{v}$ par la projection orthogonale p sur (P), suivie par l'homothétie h de rapport $\left\|\overrightarrow{u}\right\|$, suivie par la rotation r d'angle $+\frac{\pi}{2}$ dans le plan (P). On a donc

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=r\left[h\left(p\left(\overrightarrow{v}\right)\right)\right].$$

Or ces transformations sont linéaires, et la composée de deux applications linéaires est linéaire. En particulier, pour tout couple de vecteurs $\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\wedge\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)&=r\left[h\left(p\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)\right)\right]=r\left[h\left(p\left(\overrightarrow{v}\right)+p\left(\overrightarrow{w}\right)\right)\right]\\&=r\left[h\left(p\left(\overrightarrow{v}\right)\right)+h\left(p\left(\overrightarrow{w}\right)\right)\right]=r\left[h\left(p\left(\overrightarrow{v}\right)\right)\right]+r\left[h\left(p\left(\overrightarrow{w}\right)\right)\right].\end{aligned}$$

Ce qui se traduit par $\overrightarrow{u}\wedge\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)=\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right)+\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}\right)$.

En utilisant le fait que le produit vectoriel est antisymétrique et (6.5), on obtient

$$\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\wedge\overrightarrow{w}=-\overrightarrow{w}\wedge\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)=-\left(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u}\right)-\left(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{v}\right)=\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}\right)+\left(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\right).$$

Le théorème 8.3 est donc démontré.

La démonstration du théorème 8.4 procède des mêmes considérations.