HYPERBOLE

Le but de ce qui suit est de décrire rapidement et simplement les principales propriétés de l'hyperbole, comme nous l'avons fait dans le chapitre 15 de TLM1 pour l'ellipse et la parabole. Pour une introduction unifiée des coniques (ellipse, parabole et hyperbole) par foyer et directrice et une étude plus approfondie de leurs propriétés, voir le complément *Coniques* sur le site http ://touteslesmaths.fr.

Dans tout ce qui suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé.

1 Définition de l'hyperbole

Soient a et b deux nombres réels positifs. Nous définissons l'*hyperbole* (H) de paramètres a et b par son équation cartésienne réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

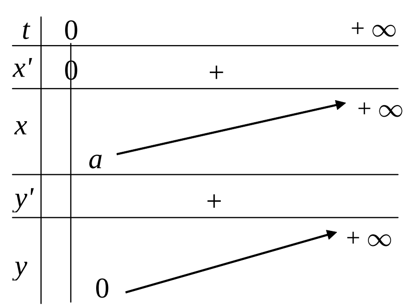
On notera l'analogie de cette équation avec celle de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Comme l'ellipse, l'hyperbole (H) admet Ox et Oy comme axes de symétrie, et O comme centre de symétrie. A l'aide de la relation $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ (TLM1 page 142), on voit que, *pour* $x \geq 0$, *l'hyperbole* (H) *d'équation cartésienne* (1) *admet la représentation paramétrique :*

$$x = a \operatorname{ch} t, \;\; y = b \operatorname{sh} t \tag{2}$$

On notera que la représentation paramétrique ne permet de décrire que les points de l'hyperbole d'abscisse positive, car $\operatorname{ch} t \geq 0$ pour tout t réel.

La représentation paramétrique va nous donner l'allure de l'hyperbole. On fait varier t entre 0 et $+\infty$, car le changement $t \leftarrow -t$ correspond à la symétrie par rapport à Ox. On a $x' = a \operatorname{sh} t$ et $y' = b \operatorname{ch} t$. D'où les variations simultanées de x et y :



Au point de paramètre $t = 0$, on a une tangente verticale. Lorsque $t \to +\infty$, on a une branche infinie.
On calcule d'abord $\lim_{t \to +\infty} \dfrac{y}{x} = \lim_{t \to +\infty} \dfrac{b}{a} \operatorname{th} t = \dfrac{b}{a}$. On calcule ensuite :

$$\lim_{t \to +\infty} \left(y - \frac{b}{a} x \right) = \lim_{t \to +\infty} \left[b \left(\operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \right) \right] = \lim_{t \to +\infty} \left(-b e^{-t} \right) = 0.$$

Donc la droite d'équation $y = \dfrac{b}{a} x$ est asymptote oblique à l'hyperbole.

En utilisant les symétries par rapport à Ox et Oy, on obtient sa représentation graphique (figure 1 page suivante).

Remarque 1 Par analogie avec le cas du cercle et de l'ellipse (TLM1, page 179), on voit que la forme générale de l'équation cartésienne d'une hyperbole dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées est :

$$\frac{(x - x_\Omega)^2}{a^2} - \frac{(y - y_\Omega)^2}{b^2} = \pm 1. \tag{3}$$

Cette hyperbole est centrée en $\Omega\,(x_\Omega\,, y_\Omega)$. Si le second membre vaut -1, les rôles de x et y sont inversés et l'hyperbole se présente comme dans la figure 2 ci-dessous.

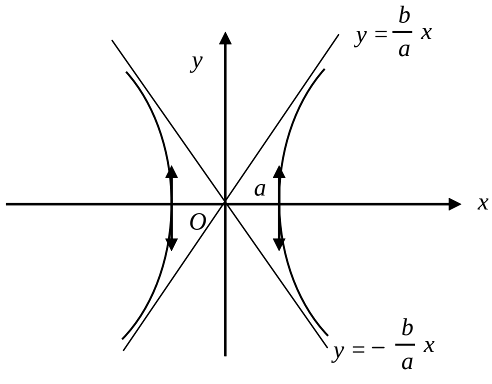


Figure 1

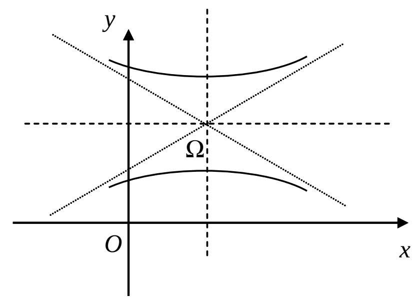


Figure 2

2 Foyers et excentricité

Revenons à l'équation réduite (1) . On définit la *demi distance focale* c de l'hyperbole par

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{4}$$

et les *foyers* F et F' comme les points de coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$. On retiendra que (4) s'écrit aussi $c^2 = a^2 + b^2$, ce qui revient au théorème de Pythagore. Comme le coefficient directeur de l'asymptote oblique est $\frac{b}{a}$, a et b peuvent s'interpréter comme indiqué sur la figure 3. Pour obtenir géométriquement les foyers de l'hyperbole, on reportera au compas la longueur c à partir du centre O.

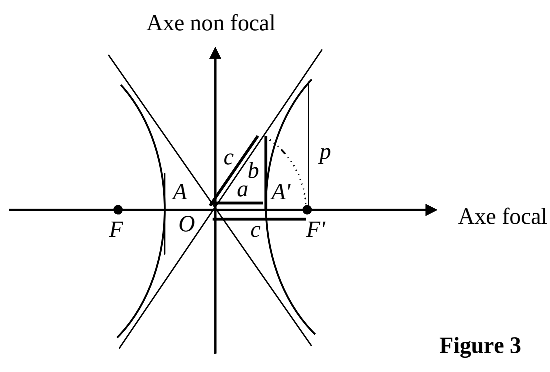


Figure 3

Comme pour l'ellipse, l'*excentricité* e de l'hyperbole est définie par

$$e = \frac{c}{a}. \tag{5}$$

Puisque $c = \sqrt{a^2 + b^2} > a$, dans le cas de l'hyperbole on a $e > 1$.

3 Propriétés bifocale et paramètre

La propriété bifocale de l'hyperbole exprime que la différence des distances d'un point M aux foyers F et F' est une constante. Plus précisément, *pour tout point* M *de l'hyperbole* (H)*, on a*

$$|FM - F'M| = 2a \tag{6}$$

Cette relation est à comparer à la propriété bifocale de l'ellipse (formule 15.6 page 180 de TLM1). Voir l'exercice 4 ci-dessous pour la démonstration.

Enfin, le paramètre p de l'hyperbole (à ne pas confondre avec le paramètre t qui sert à définir la représentation paramétrique) est la distance entre un des foyers et le point de l'hyperbole obtenu quand on remonte perpendiculairement à l'axe focal, c'est-à-dire l'axe qui porte les foyers (voir figure 3). Comme pour l'ellipse, on démontre que

$$p = \frac{b^2}{a}. \tag{7}$$

Le tableau ci-dessous résume les propriétés comparées de l'ellipse et de l'hyperbole.

	Ellipse	Hyperbole
Equation réduire	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Représentation graphique	Figure 15.2 (TLM1)	Figure 3 ci-dessus
Foyers	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{a}$
Propriété bifocale	$FM + F'M = 2a$	$\lvert FM - F'M \rvert = 2a$
Paramètre	$p = \frac{b^2}{a}$	$p = \frac{b^2}{a}$

4 Hyperbole en coordonnées polaires

Nous démontrons ici que *la conique* (C) *d'équation polaire*

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}. \tag{8}$$

où $p > 0$ *et* $e > 1$, *est une hyperbole dont un des foyers est* O, *d'axe focal* Ox, *d'excentricité* e *et de paramètre* p.

Ceci complète la description des coniques définies par leur équation polaire (TLM1, remarque 15.3 page 183).

Pour démontrer ce résultat, on procède comme dans le cas où $0 < e < 1$ (TLM1 page 181). On peut écrire

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta} \Leftrightarrow r - er\cos\theta = p.$$

Puisque $x = r\cos\theta$, il vient $r = p + ex$. En élevant au carré, on obtient $r^2 = p^2 + 2epx + e^2x^2$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = p^2 + 2epx + e^2x^2$. D'où l'équation cartésienne de (C) :

$$(e^2 - 1)x^2 + 2epx - y^2 = -p^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2ep}{e^2 - 1}x - \frac{y^2}{e^2 - 1} = -\frac{p^2}{e^2 - 1}.$$

On fait alors apparaître des débuts de développements de carrés. L'équation cartésienne de (C) s'écrit

$$\left(x + \frac{ep}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{e^2p^2}{(e^2 - 1)^2} - \frac{y^2}{e^2 - 1} = -\frac{p^2}{e^2 - 1},$$

c'est-à-dire encore

$$\left(x + \frac{ep}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{p^2}{(e^2 - 1)^2}. \tag{9}$$

Finalement, l'équation cartésienne de (C) est

$$\frac{\left(x + \frac{ep}{e^2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{p}{e^2 - 1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}\right)^2} = 1.$$

On voit donc que (C) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{ep}{e^2-1}, 0\right)$, avec

$$a = \frac{p}{e^2-1}, \ b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}.$$

On en déduit immédiatement que $c = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{ep}{e^2-1}$.
Ceci prouve bien que (C) est une hyperbole d'axe focal Ox, de foyer O (figure 4).

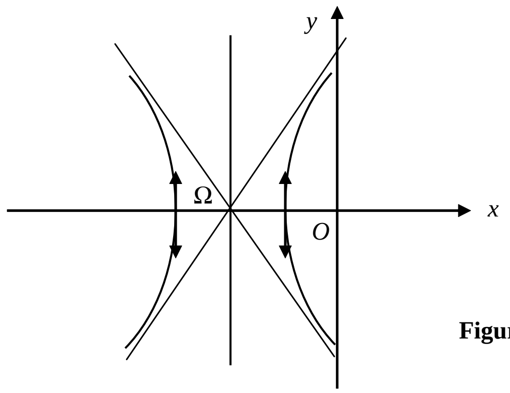


Figure 4

L'excentricité est $\frac{c}{a} = e$, et le paramètre est p (prendre $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans l'équation polaire), C.Q.F.D.

EXERCICES

Exercice 1 Construire les hyperboles d'équations $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ et $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1$.
Dans chaque cas, on fera figurer les sommets et les foyers, et on calculera l'excentricité e et le paramètre p.

Exercice 2 On considère la courbe (Γ) d'équation polaire

$$r = \frac{5}{1 - \frac{3}{2}\cos\theta}.$$

1) Quelle est la nature de (Γ) ? Donner son excentricité et son paramètre.
2) Calculer a, b, c.
3) Déterminer les sommets A et A' de l'hyperbole, qui correspondent à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.
4) Construire (Γ).
5) Donner l'équation cartésienne de (Γ).

Exercice 3 On donne deux points distincts du plan, F et F'. Construire à la règle et au compas les sommets et les asymptotes de l'hyperbole de foyers F et F', d'excentricité $e = 2$. Tracer cette hyperbole.

Exercice 4 Démontrer la propriété bifocale de l'hyperbole.

Exercice 5 Soit la courbe (Γ) définie par l'équation polaire $r = \frac{\cos\theta}{\cos 2\theta}$.
1) Montrer que l'équation cartésienne de (Γ) est $x^2 - y^2 - x = 0$.
2) En déduire que (Γ) est une hyperbole dont on déterminera le centre, les foyers, l'excentricité et le paramètre.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 1 Pour la première hyperbole, $a = 2$ et $b = 1$. L'axe focal est donc Ox, le centre O, l'axe non focal Oy. On a les asymptotes grâce au point B vérifiant $AB = b = 1$ (figure 6). Les foyers sont les intersections du cercle de centre O de rayon $OB = c$ avec l'axe focal et $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$. Donc $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $p = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{1}{2}$.

Pour la deuxième, l'équation s'écrit $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$ après multiplication par -1.

Donc $a = 2$ (*c'est la valeur qui figure sous le terme positif*) et $b = 3$. Puisque a est situé sous y, l'axe focal est Oy, le centre O, l'axe non focal Ox. On obtient les asymptotes grâce au point B vérifiant $AB = b = 2$ (figure 7). Les foyers sont les points d'intersection du cercle de centre O de rayon $OB = c$ avec l'axe focal et on a $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$. Donc $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$ et $p = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{9}{2}$.

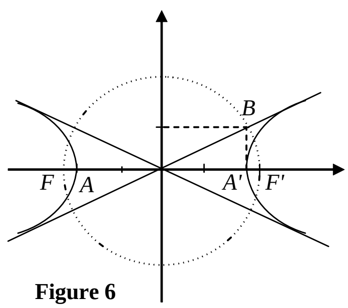


Figure 6

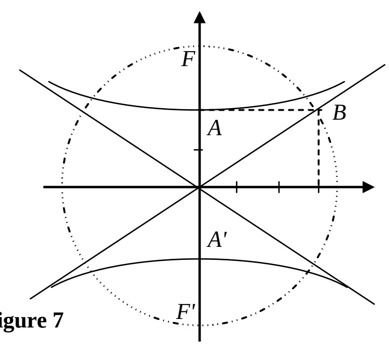


Figure 7

Exercice 2 1) Il s'agit d'une conique, d'excentricité $e = \frac{3}{2} > 1$.
Donc (Γ) est une hyperbole d'axe focal Ox, de foyer O, de paramètre $p = 5$.

2) On sait que $p = \dfrac{b^2}{a}$ et $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$. Donc ici $b^2 = 5a$ et $\dfrac{9a^2}{4} = a^2 + b^2$, c'est-à-dire $b^2 = \dfrac{5}{4}a^2$.

On en déduit que $\dfrac{5}{4}a^2 = 5a$, d'où après simplification par $5a$, $a = 4$ et $b = 2\sqrt{5}$. Enfin $c = ea = 6$.

3) Pour $\theta = 0$, on a $r = -10$ et $\overrightarrow{e}_r = \overrightarrow{i}$. Donc le sommet A a pour coordonnées cartésiennes $x = -10$, $y = 0$.

Pour $\theta = \pi$, on a $r = 2$ et $\overrightarrow{e}_r = -\overrightarrow{i}$. Donc le sommet A a pour coordonnées cartésiennes $x' = -2$, $y' = 0$.

4) On place d'abord les sommets A et A', puis le centre Ω à partir du foyer O car $c = 6$, et enfin les asymptotes. Le deuxième foyer est F. Voir figure 8.

5) Cette équation s'écrit $\dfrac{(x - x_\Omega)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_\Omega)^2}{b^2} = 1$, c'est-à-dire $\dfrac{(x + 6)^2}{16} - \dfrac{y^2}{20} = 1$.

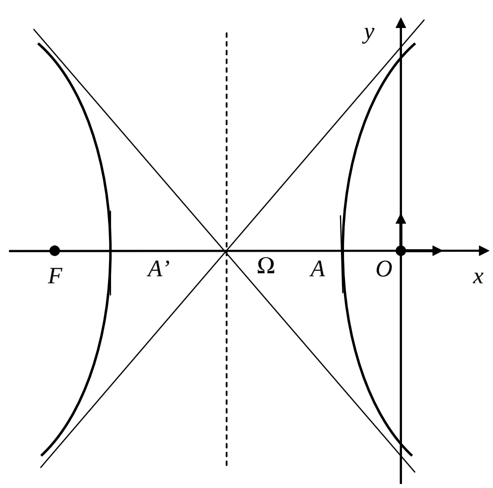


Figure 8

Exercice 3 On construit d'abord la médiatrice (Δ) de FF', qui coupe FF' en O. La distance OF est c.
Puisque $e = \dfrac{c}{a}$, on a $a = \dfrac{1}{2}c = \dfrac{1}{2}OF$. Le milieu de OF est le sommet A. Par symétrie par rapport à O on obtient A'.
On construit ensuite la perpendiculaire (D) à (FF') passant par A.
Le cercle de centre O de rayon OF coupe (D) aux sommets K et K'.
On trace les droites (OK) et (OK'), qui sont les asymptotes. D'où l'hyperbole.

Exercice 4 Choisissons d'abord un point M situé dans la partie de l'hyperbole où $x \geq 0$.
Alors $x = a\,\mathrm{ch}\,t$ et $y = b\,\mathrm{sh}\,t$. Donc :

$$\begin{aligned} FM &= \sqrt{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2} = \sqrt{(a\,\mathrm{ch}\,t - c)^2 + b^2\,\mathrm{sh}^2\,t} \\ &= \sqrt{a^2\,\mathrm{ch}^2\,t - 2ac\,\mathrm{ch}\,t + c^2 + b^2\,\mathrm{sh}^2\,t} = \sqrt{(a^2+b^2)\,\mathrm{ch}^2\,t - 2ac\,\mathrm{ch}\,t + c^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Or $c = \sqrt{a^2+b^2}$, donc $a^2 + b^2 = c^2$ et $c^2 - b^2 = a^2$. Par suite

$$FM = \sqrt{c^2\,\mathrm{ch}^2\,t - 2ac\,\mathrm{ch}\,t + a^2} = \sqrt{(c\,\mathrm{ch}\,t - a)^2}.$$

Puisque $c > a$, on a $c\,\mathrm{ch}\,t - a > 0$, donc $FM = c\,\mathrm{ch}\,t - a$. Le calcul de $F'M$ est le même, avec c remplacé par $-c$.
Ainsi $F'M = c\,\mathrm{ch}\,t + a$, d'où le résultat si $x \geq 0$ [on a alors $F'M > FM$].
Par symétrie, on a $FM - F'M = 2a$ si $x \geq 0$.
Dans ce cas $FM - F'M < 0$ et on prend les valeurs absolues pour couvrir les deux cas.

Exercice 5 1) On a $r = \dfrac{\cos\theta}{\cos 2\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$, donc $r\cos^2\theta - r\sin^2\theta = \cos\theta$.
En multipliant les deux membres par r, il vient $r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = r\cos\theta$, c'est-à-dire $x^2 - y^2 = x$.
2) Cette équation s'écrit $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \dfrac{1}{4}$, c'est à dire

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

Il s'agit donc d'une hyperbole (équilatère puisque $a = b$) de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$, avec

$$a = b = \frac{1}{2}, \quad c = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}, \quad p = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}.$$