FORMULE DE GREEN-RIEMANN

La formule de Green-Riemann permet de transformer une intégrale double en intégrale curviligne. Comme nous le verrons plus loin, elle est un cas particulier de la formule de Stokes (voir TLM1, page 314). Nous en donnerons toutefois une justification directe dans le cas où le domaine d'intégration D est une "patate" comme dans la figure 1.

1 Formule de Green-Riemann

Soit (C) une courbe fermée orientée (figure 1), parcourue dans le sens trigonométrique.

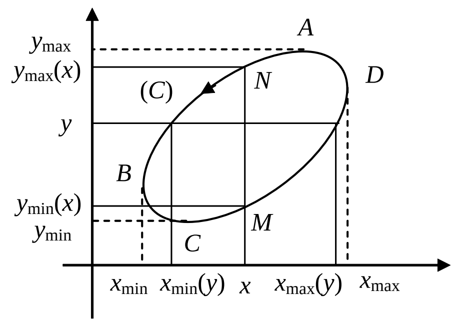

Figure 1

Soient $P = P(x, y)$ et $Q = Q(x, y)$ des fonctions de deux variables, définies et admettant des dérivées partielles continues sur (C) et en tout point de l'intérieur D de (C). La *formule de Green-Riemann* s'écrit :

$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\overset{\hookleftarrow}{(C)}} Pdx + Qdy} \tag{1}$$

Elle permet de transformer une intégrale double en intégrale curviligne (TLM1, page 276).

Démonstration En séparant l'intégrale double en deux, on a

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \\
&= \int_{y=y_{min}}^{y=y_{max}} \left(\int_{x=x_{min}(y)}^{x=x_{max}(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy - \int_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} \left(\int_{y=y_{min}(x)}^{y=y_{max}(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx \\
&= \int_{y=y_{min}}^{y=y_{max}} \Big[Q(x, y) \Big]_{x=x_{min}(y)}^{x=x_{max}(y)} dy - \int_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} \Big[P(x, y) \Big]_{y=y_{min}(x)}^{y=y_{max}(x)} dx.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy &= \int_{y=y_{min}}^{y=y_{max}} Q(x_{max}(y), y)\, dy - \int_{y=y_{min}}^{y=y_{max}} Q(x_{min}(y), y)\, dy \\
&\quad - \int_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} P(x, y_{max}(x))\, dx + \int_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} P(x, y_{min}(x))\, dx.
\end{aligned}$$

Interprétons les quatre intégrales qui apparaissent comme des intégrales curvilignes grâce à la figure 1. On observe que :

a) $\displaystyle\int_{y=y_{min}}^{y=y_{max}} Q(x_{max}(y), y)\, dy = \int_{\overset{\hookleftarrow}{CA}_{(d)}} Q(x, y)\, dy$, l'arc $\overset{\hookleftarrow}{CA}_{(d)}$ étant parcouru sur la partie située à droite de (C).

Cette circulation correspond donc au sens trigonométrique sur (C).

b) $\displaystyle\int_{y=y_{\min}}^{y=y_{\max}} Q\left(x_{\min}(y), y\right) dy = \int_{\overleftrightarrow{CA}_{(g)}} Q(x,y)\,dy$, l'arc $\overleftrightarrow{CA}_{(g)}$ étant parcouru sur la partie située à gauche de (C).

On en déduit que $\displaystyle\int_{y=y_{\min}}^{y=y_{\max}} Q\left(x_{\min}(y), y\right) dy = -\int_{\overleftrightarrow{AC}_{(g)}} Q(x,y)\,dy$, l'arc $\overleftrightarrow{AC}_{(g)}$ étant parcouru sur la partie située à gauche de (C), avec un sens de circulation qui correspond au sens trigonométrique sur (C).

c) $\displaystyle\int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} P\left(x, y_{\max}(x)\right) dx = \int_{\overleftrightarrow{BD}_{(h)}} P(x,y)\,dx$, l'arc $\overleftrightarrow{BD}_{(h)}$ étant parcouru sur la partie située en haut de (C).

Par conséquent $\displaystyle\int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} P\left(x, y_{\max}(x)\right) dx = -\int_{\overleftrightarrow{DB}_{(h)}} P(x,y)\,dx$, l'arc $\overleftrightarrow{DB}_{(h)}$ étant parcouru sur la partie située en haut de (C), avec un sens de circulation qui correspond au sens trigonométrique sur (C).

d) $\displaystyle\int_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} P\left(x, y_{\min}(x)\right) dx = \int_{\overleftrightarrow{BD}_{(b)}} P(x,y)\,dx$, l'arc $\overleftrightarrow{BD}_{(b)}$ étant parcouru sur la partie située en bas de (C), donc dans le sens qui correspond au sens trigonométrique sur (C).

On obtient donc finalement

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy &= \int_{\overleftrightarrow{CA}_{(d)}} Q(x,y)\,dy + \int_{\overleftrightarrow{AC}_{(g)}} Q(x,y)\,dy + \int_{\overleftrightarrow{DB}_{(h)}} P(x,y)\,dx + \int_{\overleftrightarrow{BD}_{(b)}} P(x,y)\,dx \\ &= \oint_{\overleftrightarrow{(C)}} Q(x,y)\,dy + \oint_{\overleftrightarrow{(C)}} P(x,y)\,dx = \oint_{\overleftrightarrow{(C)}} Pdx + Qdy, \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Exemple 1 Utilisons la formule de Green-Riemann pour calculer

$$I = \iint_D y^2\,dxdy, \text{ où } D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\right\}.$$

Ici D est l'intérieur de l'ellipse (C) d'équation cartésienne $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, d'équation paramétrique $x = 2\cos t$, $y = \sin t$.
L'ellipse est parcourue dans le sens trigonométrique lorsque t varie de 0 à 2π.
Pour appliquer la formule de Green-Riemann au calcul de I, choisissons $P = 0$, et $Q = xy^2$, de telle sorte que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = y^2$.
Il vient alors

$$\iint_D y^2\,dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\overleftrightarrow{(C)}} Pdx + Qdy = \oint_{\overleftrightarrow{(C)}} xy^2\,dy.$$

Or $dy = \cos t\,dt$, donc $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} 2\cos t \sin^2 t \cos t\,dt = 2\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t\,dt$.
Puisque $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, il vient

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)\,dt = \frac{1}{4}\left[t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

2 Surface intérieure à une courbe fermée

Si on prend, dans la formule de Green-Riemann, $Q = 0$ et $P = -y$, celle-ci s'écrit

$$\iint_D dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = -\oint_{\left(\overleftrightarrow{C}\right)} y\,dx.$$

Or $\displaystyle\iint_D dxdy = \iint_D dS = S$, surface intérieure à (C).

On obtient donc une formule permettant de calculer la *surface intérieure* à (C) :

$$\boxed{S = -\oint_{(\overleftrightarrow{C})} y\,dx} \tag{2}$$

De même, en prenant $Q = x$ et $P = 0$, on obtient :

$$\boxed{S = \oint_{(\overleftrightarrow{C})} x\,dy} \tag{3}$$

Remarque 1 Si la courbe (C) est parcourue dans le sens contraire du sens trigonométrique, il est clair que l'intégrale de la formule (2) donne l'opposé de la surface (S) , c'est-à-dire un nombre négatif. On rencontre ce résultat en Thermodynamique, lorsqu'on utilise un *diagramme de Clapeyron*.

Exemple 2 Soit l'ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (figure 2).

Elle admet pour représentation paramétrique $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, et la courbe est totalement décrite dans le sens trigonométrique lorsque t varie entre 0 et 2π.

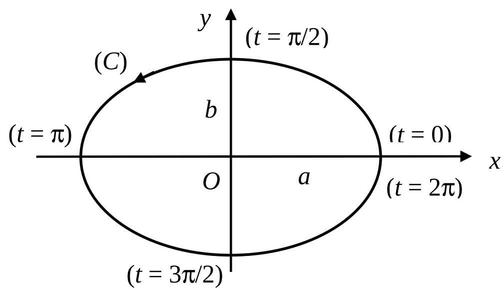

Figure 2

Puisque $x = a\cos t$, $dx = -a\sin t\,dt$ et la surface intérieure à l'ellipse vaut

$$S = -\oint_{\left(\overleftrightarrow{C}\right)} y\,dx = -\int_{t=0}^{t=2\pi} b\sin t.(-a\sin t\,dt) = ab\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt.$$

En linéarisant, il vient

$$S = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2t)\,dt = \frac{ab}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \pi ab.$$

Ce résultat est également démontré dans l'exercice 15.9, page 185 de TLM1.

3 Lien avec la formule de Stokes

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. La formule de Stokes s'écrit

$$\oint_{(\overleftrightarrow{C})} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dM} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}.d\sigma, \tag{4}$$

où $\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{E}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$ est un champ de vecteurs de l'espace, et où (Σ) est une surface orientée de l'espace s'appuyant sur une courbe fermée orientée $(\overleftrightarrow{C})$. Voir figure 3 et, pour les détails, TLM1 p. 314.

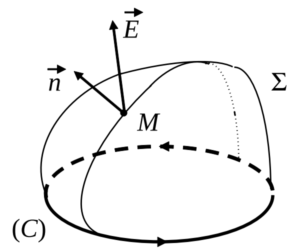

Figure 3

Supposons que la courbe $(\overset{\hookrightarrow}{C})$ est entièrement contenue dans le plan horizontal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, ainsi que la surface (Σ). Dans ce cas, le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à (Σ) est le vecteur $\overrightarrow{k}$. Supposons en outre que $\overrightarrow{E}$ est également situé dans le plan horizontal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, de telle sorte que

$$\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{E}(x,y) = P(x,y)\,\overrightarrow{i} + Q(x,y)\,\overrightarrow{j}.$$

Donc ici $R = 0$ et P et Q ne dépendent pas de z. L'expression du rotationnel de $\overrightarrow{E}$ est donc

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k},$$

de telle sorte que la formule de Stokes (4) s'écrit

$$\begin{aligned}\oint_{(\overset{\hookrightarrow}{C})} \left(P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j}\right).\left(dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j}\right) &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}.\overrightarrow{k}.dxdy \\ \Leftrightarrow \quad \oint_{(\overset{\hookrightarrow}{C})} Pdx + Qdy &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.\end{aligned}$$

C'est la formule de Green-Riemann, qui apparaît donc comme un cas particulier de la formule de Stokes.

EXERCICES

Exercice 1 : Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation cartésienne $(x-1)^2 + y^2 = 1$ et soit $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } y \geq 0\right\}$.

Calculer l'intégrale double $I = \iint_{\mathcal{D}} y\,dxdy$ en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 2 : Soit $0 < b < a$, et $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \ / \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$.

Calculer $J = \iint_{\mathcal{D}} \left(x^2 + y^2\right) dxdy$ en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 3 : On considère la *cardioïde* (TLM1 page 166), d'équation paramétrique :

$$x = R\,(2\cos t - \cos 2t) \quad ; \quad y = R\,(2\sin t - \sin 2t)\,.$$

La cardioïde est entièrement décrite lorsque t varie de 0 à 2π et sa représentation graphique est donnée par

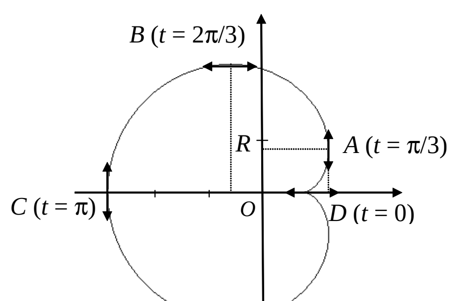

Figure 4 : La cardioïde

Calculer la surface intérieure à la courbe.

Exercice 4 : Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$.
On considère les ellipses d'équations $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.
Calculer la surface intérieure commune à ces deux ellipses.

Exercice 5 : Démontrer le deuxième théorème de Pappus-Guldin (TLM1, pages 329-330).

SOLUTIONS

Exercice 1 : On cherche d'abord P et Q tels que

$$\iint_{\mathcal{D}} y\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Il y a plusieurs façons de procéder. Par exemple, prenons $Q = xy$ et $P = 0$.
En appliquant la formule de Green-Riemann, il vient

$$I = \iint_{\mathcal{D}} y\,dx\,dy = \oint_{\overset{\hookrightarrow}{(\Gamma)}} xy\,dy,$$

où $\overset{\hookrightarrow}{(\Gamma)}$ est la frontière de $\mathcal{D}$, parcourue dans le sens trigonométrique (figure 5).

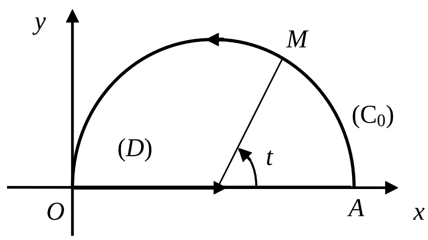

Figure 5

En notant $(\overset{\hookrightarrow}{C_0})$ le demi-cercle parcouru dans le sens indiqué, il vient

$$I = \iint_{\mathcal{D}} y\,dx\,dy = \int_{(\overset{\hookrightarrow}{C_0})} xy\,dy + \int_{(\overrightarrow{OA})} xy\,dy.$$

Or sur $(\overrightarrow{OA})$ on a $dy = 0$ car y reste constant (égal à 0). Par ailleurs une représentation paramétrique de $(\overset{\hookrightarrow}{C_0})$ est

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

lorsque t varie entre 0 et π. Alors $dy = \cos t\,dt$, donc

$$I = \int_{t=0}^{t=\pi} (1 + \cos t)\sin t \cos t\,dt = \int_{t=0}^{t=\pi} \left(\sin t \cos t + \sin t \cos^2 t\right) dt = \left[-\frac{1}{2}\cos^2 t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}.$$

Exercice 2 : Le domaine d'intégration est l'intérieur d'une ellipse (E) centrée en O, de grand axe horizontal (figure 2). Une représentation paramétrique de cette ellipse parcourue dans le sens trigonométrique est $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, pour t variant entre 0 et 2π. On observe que

$$J = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \text{ avec } Q = xy^2 \text{ et } P = -x^2 y.$$

En appliquant la formule de Green-Riemann, on obtient

$$\begin{aligned}
J &= \oint_{\left(\overset{\hookrightarrow}{\Gamma}\right)} -x^2 y\,dx + xy^2\,dy = \int_{t=0}^{t=2\pi} -\left(a^2\cos^2 t\right) \times (b\sin t) \times (-a\sin t\,dt) + (a\cos t) \times \left(b^2\sin^2 t\right) \times (b\cos t\,dt) \\
&= ab\left(a^2 + b^2\right)\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}ab\left(a^2 + b^2\right)\int_0^{2\pi} (2\sin t\cos t)^2\,dt = \frac{1}{4}ab\left(a^2 + b^2\right)\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt \\
&= \frac{1}{8}ab\left(a^2 + b^2\right)\int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)\,dt = \frac{\pi}{4}ab\left(a^2 + b^2\right).
\end{aligned}$$

Exercice 3 : Cette surface vaut $S = -\int_{(C)} y\,dx = 2R^2 \int_{t=0}^{t=2\pi} (2\sin t - \sin 2t)(\sin t - \sin 2t)\,dt$. En développant, il vient

$$\begin{aligned} S &= 2R^2 \int_0^{2\pi} \left(2\sin^2 t - 3\sin t \sin 2t + \sin^2 2t\right) dt = 2R^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos 2t - 6\sin^2 t \cos t + \frac{1}{2}(1-\cos 4t)\right) dt \\ &= 2R^2 \left[t - \frac{1}{2}\sin 2t - 2\sin^3 t + \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\right]_0^{2\pi} = 6\pi R^2. \end{aligned}$$

Exercice 4 : On utilise la formule (2) appliquée à la figure 7 ci-dessous.

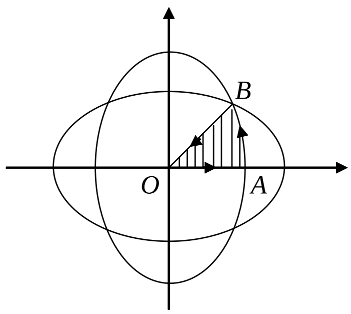

Figure 6

Les symétries de la figure montrent que la surface S cherchée vaut

$$S = 8\left(-\int_{\overset{\hookrightarrow}{C}} y\,dx\right) = -8\left(\int_{\overset{\hookrightarrow}{AB}} y\,dx + \int_{\overset{\hookrightarrow}{BO}} y\,dx + \int_{\overset{\hookrightarrow}{OA}} y\,dx\right).$$

Sur l'arc $\overset{\hookrightarrow}{OA}$, on a $y = 0$, donc la troisième intégrale est nulle.

L'arc $\overset{\hookrightarrow}{AB}$ correspond à l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, il est donc paramétré par $x = b\cos t$ et $y = a\sin t$. Le point A correspond à $t = 0$. Cherchons la valeur du paramètre correspondant au point B.

Les coordonnées x et y de B vérifient le système $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$.

On a donc en multipliant la première équation par a^2, la deuxième par b^2, et en soustrayant :

$$y^2\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}\right) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{a^2b^2\left(a^2-b^2\right)}{a^4 - b^4} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Puisque y est positif, il vient $y = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

La valeur du paramètre t correspondant au point B vérifie donc $a\sin t = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Puisque $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, il vient $t = \arcsin \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Par suite

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\hookrightarrow}{AB}} y\,dx &= \int_{t=0}^{t=\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} a\sin t.(-b\sin t)\,dt = -\frac{ab}{2}\int_{t=0}^{t=\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} (1-\cos 2t)\,dt \\ &= -\frac{ab}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} = -\frac{ab}{2}\left[t - \sin t\cos t\right]_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \\ &= -\frac{ab}{2}\left[\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{1 - \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}\right] \\ &= -\frac{ab}{2}\left[\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{ab}{a^2+b^2}\right]. \end{aligned}$$

Il reste à calculer $\int_{\overleftrightarrow{BO}} y\,dx$.

Sur BO, on est sur la première bissectrice et $y = x$. En outre x varie de $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ à 0. On a donc

$$\int_{\overleftrightarrow{BO}} y\,dx = \int_{x=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{x=0} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{0} = -\frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

On obtient finalement la surface cherchée :

$$S = -8\left(\int_{\overleftrightarrow{AB}} y\,dx + \int_{\overleftrightarrow{BO}} y\,dx\right) = 4ab \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

<u>Exercice 5</u> : On découpe le volume de révolution en tranches infinitésimales de hauteur dy (figure 7) :

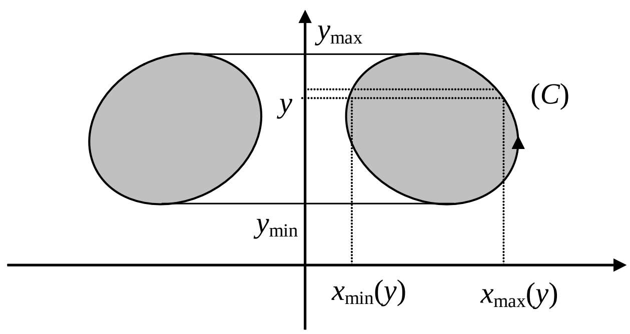

Figure 7

Le volume balayé par la surface S vaut $V = \int_{y_{min}}^{y_{max}} s(y)\,dy$, où $s(y)$ désigne la surface de la tranche d'ordonnée y.
Or cette tranche est une couronne circulaire.
Le rayon du cercle intérieur est $x_{\min}(y)$ et le rayon du cercle extérieur est $x_{\max}(y)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} V &= \int_{y_{min}}^{y_{max}} \left(\pi x_{\max}(y)^2 - \pi x_{\min}(y)^2\right) dy = \pi\left[\int_{y_{min}}^{y_{max}} x_{\max}(y)^2\,dy - \int_{y_{min}}^{y_{max}} x_{\min}(y)^2\,dy\right] \\ &= \pi\left[\int_{y_{min}}^{y_{max}} x_{\max}(y)^2\,dy + \int_{y_{max}}^{y_{min}} x_{\min}(y)^2\,dy\right] = \pi\int_C x^2\,dy, \end{aligned}$$

où la courbe (C) est parcourue dans le sens trigonométrique.
On utilise alors la formule de Green-Riemann avec $P = 0$ et $Q = x^2$. Il vient

$$V = \pi\int_C x^2\,dy = \pi\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 2\pi\iint_S x\,dS.$$

Or $x_G = \dfrac{1}{S}\iint_S x\,dS$, d'où le deuxième théorème de Pappus-Guldin.