SERIES DE FOURIER

Ce complément de cours vise à donner une introduction rapide aux séries de Fourier, essentiellement en vue des applications. Pour la définition d'une série comme limite de ses sommes partielles, on se reportera à TLM1, page 512. Dans tout ce qui suit, T est un nombre réel strictement positif.

1 Coefficients de Fourier d'une fonction périodique

1.1 Définition

Soit $y = f(t)$ une fonction périodique de période T, de pulsation

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{1}$$

Nous supposons que f *est* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux*, c'est-à-dire qu'on peut décomposer l'intervalle $[0, T]$ en sous-intervalles de la forme $]0, t_1[\,,]t_1, t_2[\,, \cdots,]t_n, T[$ tels que :

- ♦ f est $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire dérivable avec une dérivée continue) sur chacun de ces intervalles ;
- ♦ f et f' admettent des limites finies à gauche et à droite de ces intervalles.

Pour tout réel a, on note $f(a^+) = \lim_{t \to a^+} f(t)$ la limite de f en a à droite et $f(a^-) = \lim_{t \to a^-} f(t)$ la limite de f à gauche de a.

Exemple 1 *Soit* $y = f(t)$, *T-périodique, définie par*

$$\begin{cases} f(t) = 1 & \textit{si} \;\; t \in \left[0, \frac{T}{2}\right[\\ f(t) = 0 & \textit{si} \;\; t \in \left[\frac{T}{2}, T\right[\end{cases} \tag{2}$$

La représentation graphique de f est donnée figure 1. On observe que f est C^1 par morceaux car f est $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{T}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{T}{2}, T\right[$, $f(0^+) = f\left(\frac{T}{2}^-\right) = 1$, $f(\frac{T}{2}^+) = f(T^-) = 0$, $f'(0^+) = f'\left(\frac{T}{2}^-\right) = f'(\frac{T}{2}^+) = f'(T^-) = 0$.

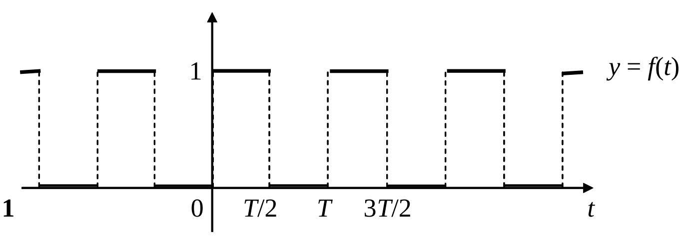


Figure 1

Définition 2 *Soit* $y = f(t)$, *T-périodique et* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux. Les coefficients de Fourier de* f *sont définis par :*

a) Le coefficient a_0 *est la valeur moyenne de* f *sur une période, c'est-à-dire*

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt} \tag{3}$$

b) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt} \tag{4}$$

c) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt} \tag{5}$$

Les coefficients de Fourier forment le *spectre* de f.

La deuxième égalité dans (3), (4) et (5) se justifie grâce au résultat suivant (th. 19.6 page 216 de TLM1) :

Théorème 3 *Soit* $y = f(t)$, *T-périodique et* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux.*
Alors l'intégrale $G(a) = \int_a^{a+T} f(t)\,dt$ *ne dépend pas de* a.

Les formules (3), (4) et (5) se retiennent facilement :
a) Comme on l'a dit, a_0 est la valeur moyenne de f sur une période (TLM1, page 220).
b) Pour $n \geq 1$, a_n s'obtient en multipliant a_0 par 2 et en ajoutant $\cos(n\omega t)$ dans l'intégrale.
c) Pour $n \geq 1$, b_n s'obtient en multipliant a_0 par 2 et en ajoutant $\sin(n\omega t)$ dans l'intégrale.

1.2 Premier exemple : signal rectangulaire

Reprenons l'exemple 1, figure 1. Soit $y = f(t)$, T-périodique, définie par

$$\begin{cases} f(t) = 1 \text{ si } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right[\\ f(t) = 0 \text{ si } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right[\end{cases} \tag{6}$$

a) Calcul de a_0. On utilise (3) :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt a_0 = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt + \int_{\frac{T}{2}}^T f(t)dt\right) = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1.dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0.dt\right) = \frac{1}{T}\Big[t\Big]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

b) Calcul de a_n pour $n \geq 1$. On utilise (4) :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\left[\frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{n\omega T}\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right).$$

Or on sait que $\omega T = 2\pi$ par définition de la pulsation. Donc, pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi) = 0. \tag{8}$$

c) Calcul de b_n pour $n \geq 1$. On utilise (5) :

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\left[\frac{-1}{n\omega}\cos(n\omega t)\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{-1}{n\pi}\Big(\cos(n\pi) - 1\Big).$$

Or en observant le cercle trigonométrique, on voit que $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Donc

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right).$$

On est ainsi amenés à distinguer le cas où n est pair ($n = 2p$) et celui où n est impair ($n = 2p+1$) :

$$b_{2p} = 0 \;\; (p \geq 1) \;\; , \quad b_{2p+1} = \frac{2}{\pi(2p+1)} \;\; (p \geq 0). \tag{9}$$

Nous avons obtenu le spectre de f : les coefficients de Fourier de f sont donnés par (7), (8) et (9).

2 Cas des fonctions paires ou impaires

Dans le cas où f est paire ou impaire, le calcul des coefficients de Fourier se simplifie considérablement par suite des résultats suivants (th. 18.4 et 18.5, page 215 de TLM1) :

Théorème 4 *Soit* $a \geq 0$. *Soit* $y = f(t)$ *une fonction paire. Alors*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Théorème 5 *Soit* $a \geq 0$. *Soit* $y = f(t)$ *une fonction impaire. Alors*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

2.1 Cas où f est paire

Dans le cas où f est paire, on observe que $f(t)\cos(n\omega t)$ est également paire, tandis que $f(t)\sin(n\omega t)$ est impaire.

En utilisant la deuxième égalité de la formule (3), il vient immédiatement : *si* f *est paire*,

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt} \tag{10}$$

En utilisant la deuxième égalité de la formule (4), on obtient : *pour* $n \geq 1$, *si* f *est paire,*

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt} \tag{11}$$

Enfin, en utilisant la deuxième égalité de la formule (5), on voit que, si f est paire,

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt = 0.$$

Ainsi, *si* f *est paire, alors pour tout* $n \geq 1$ *on a* $b_n = 0$.

2.2 Cas où f est impaire

Dans le cas où f est impaire, on observe que $f(t)\cos(n\omega t)$ est également impaire, tandis que $f(t)\sin(n\omega t)$ est paire.

En utilisant la deuxième égalité des formules (3) et (4), il vient immédiatement : *si* f *est paire, alors pour tout* $n \geq 0$ *on a* $a_n = 0$.

De plus, en utilisant la deuxième égalité de la formule (5), on voit que, *si* f *est impaire, pour tout* $n \geq 1$,

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt} \tag{12}$$

2.3 Etude d'un deuxième exemple

Soit $y = g(t)$, périodique de période 2π, définie par $g(t) = t^2$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$. La représentation graphique de g sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ est une *portion de parabole* admettant l'axe des y pour axe de symétrie vertical. La représentation graphique de g est ainsi donnée ci-dessous :

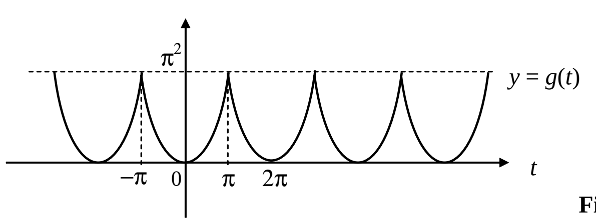


Figure 2

Cette représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des y. La fonction g est donc paire. Il en résulte que

$$b_n = 0 \quad (n \geq 1)\,. \tag{13}$$

En utilisant la parité et le fait que $T = 2\pi$, on obtient

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} g(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}. \tag{14}$$

Pour calculer a_n pour $n \geq 1$, on utilise encore la parité et on remplace ω par 1 car $T = 2\pi$:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} g(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)dt.$$

On effectue une première intégration par parties en posant $u = t^2$ et $v' = \cos(nt)$:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{t^2}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt\right) = \frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt\right) = -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt.$$

On effectue une deuxième intégration par parties en posant $u = t$ et $v' = \sin(nt)$:

$$a_n = -\frac{4}{n\pi}\left(\left[-\frac{t}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)dt\right) = -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n^2}\Big[\sin(nt)\Big]_0^{\pi}\right).$$

Puisque $\sin(n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pour tout entier n, il vient finalement

$$a_n = -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{\pi(-1)^n}{n} + 0\right) = \frac{4(-1)^n}{n^2} \quad (n \geq 1)\,. \tag{15}$$

Le spectre de g est donc donné par (13), (14) et (15).

3 Développement en série de Fourier

Nous admettons ici le *théorème de Dirichlet* :

Théorème 6 *Soit $y = f(t)$ une fonction périodique de période T, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, pour tout t réel,*

$$\boxed{\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)} \tag{16}$$

où $\omega = 2\pi/T$ est la pulsation de f et où les a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de f, définis en (3), (4) et (5).

On dit que (16) est le *développement de f en série de Fourier*. On dit aussi que la *série de Fourier* de f, définie par

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\,, \tag{17}$$

converge pour tout t réel vers $\dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$.

On notera que, *en tout point t où f est continue*, on a $f(t^+) = f(t^-) = f(t)$, et dans ce cas (16) s'écrit tout simplement

$$\boxed{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)} \tag{18}$$

Exemple 7 *Reprenons l'exemple du signal rectangulaire, où* $y = f(t)$ *est T-périodique, définie par*

$$\begin{cases} f(t) = 1 & si \;\; t \in \left[0, \frac{T}{2}\right[\\ f(t) = 0 & si \;\; t \in \left[\frac{T}{2}, T\right[\end{cases} \tag{19}$$

Le théorème de Dirichlet s'applique car f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Pour tout t réel, on a donc

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t),$$

où les coefficients de Fourier a_n et b_n sont donnés par (7), (8) et (9). Puisque $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$, on obtient en distinguant les cas n pair et n impair :

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t) = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} b_{2p} \sin(2p\omega t) + \sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p+1} \sin\Big((2p+1)\omega t\Big).$$

Or $b_{2p} = 0$ pour tout entier $p \geq 1$ en vertu de (9), donc finalement le développement en série de Fourier de f est

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2p+1)} \sin\Big((2p+1)\omega t\Big) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin\Big((2p+1)\omega t\Big). \tag{20}$$

Exemple 8 *Reprenons l'exemple étudié dans la sous-section 3.3, page 3, celui de la fonction* $y = g(t)$, *périodique de période* 2π, *définie par* $g(t) = t^2$ *pour tout* $t \in [-\pi, \pi]$.

Il est clair que g est C^1 par morceaux, donc le théorème de Dirichlet s'applique. En outre g est visiblement continue pour tout réel t : en effet, le "raccord" se fait bien pour $t = \pi$ car $f(-\pi^+) = f(\pi^-)$. On peut donc écrire (18) avec $\omega = 1$ (ici $T = 2\pi$). En utilisant (13), (14) et (15), on a donc pour tout t réel

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt). \tag{21}$$

4 Convergence de la série de Fourier

Nous illustrons ici, sur un exemple, comment s'interprète la convergence de la série de Fourier d'une fonction périodique. Par définition d'une série comme limite de ses sommes partielles, la formule (16) s'écrit

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = a_0 + \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right). \tag{22}$$

Prenons l'exemple de la fonction h définie par la série de Fourier

$$h(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin\Big((2p+1)\omega t\Big). \tag{23}$$

Si nous revenons à (20), nous voyons que, pour tout réel t où f est continue,

$$h(t) = \frac{\pi}{2}\left(f(t) - \frac{1}{2}\right),$$

ce qui montre que le graphe de h s'obtient en décalant d'abord le graphe de f de $\frac{1}{2}$ vers le bas, puis en multipliant les ordonnées par $\frac{\pi}{2}$. Aux points de discontinuité, $h(t)$ est égal à la moyenne de la limite à gauche et de la limite à droite, conformément au théorème de Dirichlet. Le graphe de h a donc l'aspect suivant :

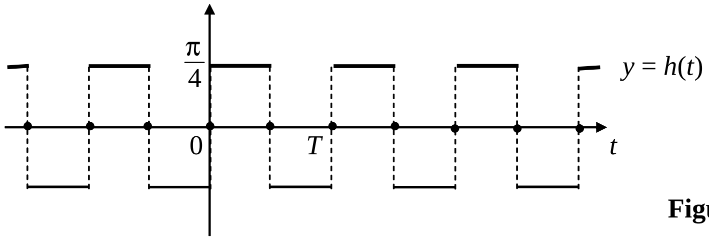
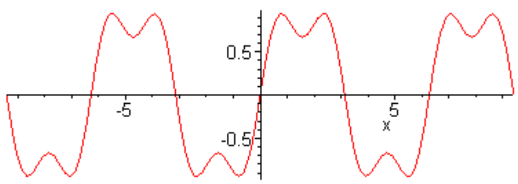


Figure 3

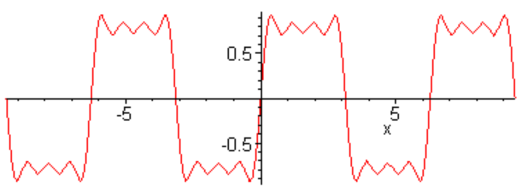
On notera que h est une fonction impaire, ce qui ne doit pas surprendre puisque son développement en série de Fourier (23) ne compte que des sinus (ce qui revient à dire que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

La série de représentations graphiques ci-dessous montre comment les sommes partielles de la série de Fourier de h convergent vers h en tout point de continuité, conformément au théorème de Dirichlet. On observe notamment que h est assez bien "reconstituée" par la somme des 26 premiers termes de sa série de Fourier (page 7). Les petites oscillations au voisinage des points de discontinuité correspondent au *phénomène de Gibbs*.

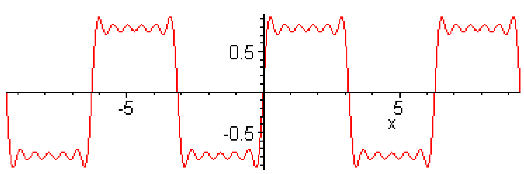
Graphe de $h_2(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$:



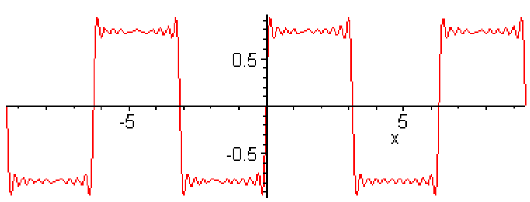
Graphe de $h_4(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x$:



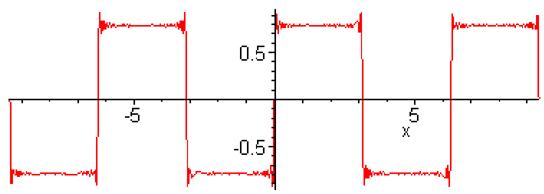
Graphe de $h_6(x) = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x$:



Graphe de $h_{11}(x) = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x$:



Graphe de $h_{26}(x) = \sum_{k=0}^{25} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x$:



5 Calculs de sommes de séries

En donnant des valeurs particulières à t dans un développement en série de Fourier, on peut obtenir des sommes de séries "classiques".

Exemple 9 *Reprenons l'exemple 7, celui de* $y = f(t)$*, T-périodique, définie par*

$$\begin{cases} f(t) = 1 & si \quad t \in \left[0, \frac{T}{2}\right[\\ f(t) = 0 & si \quad t \in \left[\frac{T}{2}, T\right[\end{cases} \tag{24}$$

On a vu que, pour tout t réel,

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin\Big((2p+1)\omega t\Big). \tag{25}$$

Prenons $t = \frac{T}{4}$. Il s'agit là d'un point de continuité de f, et on a $f\left(\frac{T}{4}^+\right) = f\left(\frac{T}{4}^-\right) = f\left(\frac{T}{4}\right) = 1$.
En remplaçant dans le développement en série de Fourier (25) et en utilisant le fait que $\omega T = 2\pi$, il vient

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin\left((2p+1)\frac{\omega T}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \cos(p\pi) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}. \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}} \tag{26}$$

La somme de cette série a été obtenue pour la première fois par *Leibniz.*

Exemple 10 *Reprenons l'exemple 8, celui de la fonction* $y = g(t)$*, périodique de période* 2π*, définie par* $g(t) = t^2$ *pour tout* $t \in [-\pi, \pi]$ *. Son DSF est donné par*

$$g(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt). \tag{27}$$

On a $g(0) = 0$. En faisant $t = 0$ dans (27), on obtient donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}} \tag{28}$$

En faisant $t = \pi$ dans (27), on obtient

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Par conséquent, on voit que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}} \tag{29}$$

Les séries (28) et (29) ont été calculées pour la première fois par *Euler*.

6 Formule de Bessel-Parseval

Supposons que f est T-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux (conditions de Dirichlet). Notons comme d'habitude a_0, a_n $(n \geq 1)$ et b_n $(n \geq 1)$ les coefficients de Fourier de f. Alors la *formule de Bessel-Parseval*, que nous admettons, s'écrit

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2 \, dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)} \tag{30}$$

On notera que le membre de gauche de la formule de Bessel-Parseval représente la *valeur moyenne du carré de* f *sur une période*. Puisque f^2 est, comme f, périodique de période T, on peut donc tout aussi bien intégrer sur n'importe quel autre intervalle de longueur T, par exemple $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Ainsi, *si* f *est paire* , f^2 est paire, et dans ce cas la formule de Bessel-Parseval s'écrit

$$\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} (f(t))^2 \, dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2. \tag{31}$$

Mais *si* f *est impaire* , f^2 est paire, et dans ce cas la formule de Bessel-Parseval s'écrit

$$\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} (f(t))^2 \, dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2. \tag{32}$$

Dans les applications, la formule de Bessel-Parseval sert à évaluer la valeur moyenne de f^2 sur une période à partir du spectre de f. En mathématiques, c'est souvent l'inverse : l'intégrale de gauche se calcule, et ainsi on obtient des sommes de séries, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 11 *Soit la fonction* $y = g(t)$, *périodique de période* 2π, *définie par* $g(t) = t^2$ *pour tout* $t \in [-\pi, \pi]$ *(exemple 8). Son DSF est donné par*

$$g(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt). \tag{33}$$

Puisque g est paire, la formule de Bessel-Parseval s'écrit

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(g(t)\Big)^2 \, dt = \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4 \times (-1)^n}{n^2}\right)^2. \tag{34}$$

Ici $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(g(t)\Big)^2 \, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^4 \, dt = \frac{\pi^4}{5}$. En remplaçant dans (34), il vient $\frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{5}$, d'où

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}} \tag{35}$$

EXERCICES

Exercice 1 : 1) Soit $T > 0$. Représenter graphiquement la fonction f, T-périodique, paire, définie par $f(t) = t$ pour tout $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$ (représenter 3 ou 4 périodes).

2) Quelle est la valeur des coefficients de Fourier b_n ?

3) Calculer le coefficient de Fourier a_0.

4) Calculer les coefficients de Fourier a_n pour tout $n \geq 1$ en fonction de n et T (on distinguera, à la fin du calcul, le cas où n est pair et celui où n est impair).

5) Enoncer précisément le théorème de Dirichlet et écrire le développement en série de Fourier de f.

6) Peut-on remplacer, dans le DSF de f, $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ par $f(t)$? Pourquoi ?

7) En donnant à t une valeur bien choisie, calculer la somme de la série $S = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$.

8) En utilisant l'égalité de Bessel-Parseval, calculer la somme de la série $K = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^4}$.

Exercice 2 : 1) Soit $T > 0$. Représenter la fonction f, T-périodique, définie par $f(t) = t$ pour tout $t \in [0, T[$.

2) Calculer les coefficients de Fourier a_n.

3) Calculer les coefficients de Fourier b_n.

4) Enoncer précisément le théorème de Dirichlet et écrire le DSF de f.

5) Peut-on remplacer, dans le DSF de f, $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ par $f(t)$? Pourquoi ?

6) En prenant $t = \frac{T}{4}$, calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

7) En utilisant l'égalité de Bessel-Parseval, calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 3 : La fonction f est 2π-périodique, impaire, et vérifie $f(t) = t(\pi - t)$ si $t \in [0, \pi]$.

1) Donner l'allure de la représentation graphique de f.

2) Calculer les coefficients de Fourier de f. On pensera à simplifier les calculs en observant que, puisque $T = 2\pi$, on a $\omega = 1$.

3) Enoncer le théorème de Dirichlet et écrire le développement en série de Fourier de f.

4) En prenant $t = \frac{\pi}{2}$, en déduire la somme de la série $S_1 = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.

5) En utilisant la formule de Bessel-Parseval, calculer la somme $S_2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^6}$.

Exercice 4 : h est un réel donné, dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1) Développer en série de Fourier la fonction f, 2π-périodique, paire, telle que

$$f(t) = \frac{1}{2h} \text{ si } t \in [0, h] \text{ et } f(t) = 0 \text{ si } t \in]h, \pi],$$

après avoir tracé sa représentation graphique.

2) De ce développement, déduire les sommes des séries $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(kh)}{k}$ et $T = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(2kh)}{k}$.

3) Trouver, grâce à la formule de Parseval, la somme de la série $U = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2(kh)}{k^2}$.

Exercice 5 : Soit la fonction f définie par $f(t) = \max(\cos t, 0)$ pour tout t réel.

1) Représenter graphiquement f.

2) Appliquer le théorème de Dirichlet à f après l'avoir énoncé précisément.

3) Calculer les coefficients a_0 et a_1 du développement de f en série de Fourier.
4) Calculer a_n pour $n \geq 2$ puis donner le DSF de f.
5) Déduire de ce qui précède la somme des séries

$$S = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2 - 1} \text{ et } T = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2 - 1}.$$

6) En appliquant le théorème de Parseval, calculer la somme de la série

$$V = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)^2}.$$

7) Déduire de ce qui précède le DSF de la fonction g définie par $g(t) = \max(\sin t, 0)$ pour tout t réel.

SOLUTIONS

<u>Exercice 1</u> : 1) Sur $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, la représentation graphique de f coïncide avec la première bissectrice $y = t$. On complète par symétrie par rapport à Oy puisque f est paire, puis par périodicité. D'où le graphe (signal triangulaire) :

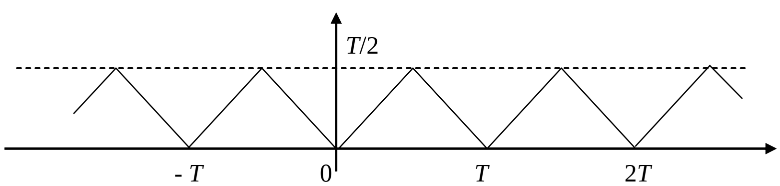


Figure 4 : Signal "triangulaire"

2) Puisque f est paire par définition, on a $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.
3) En utilisant le fait que f est paire, on écrit

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t\,dt = \frac{2}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{T}{4}.$$

4) De même, en utilisant la parité, on a pour tout $n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t\cos(n\omega t)\,dt.$$

On intègre par parties en posant $u = t$ et $v' = \cos(n\omega t)$. Il vient

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T}\left(\left[\frac{1}{n\omega} t\sin(n\omega t)\right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{n\omega}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega t)\,dt\right) = \frac{4}{n\omega T}\left(\frac{T}{2}\sin\left(n\omega\frac{T}{2}\right) + \left[\frac{1}{n\omega}\cos(n\omega t)\right]_0^{\frac{T}{2}}\right) \\ &= \frac{4}{n\omega T}\left(\frac{T}{2}\sin\left(n\omega\frac{T}{2}\right) + \frac{1}{n\omega}\left[\cos\left(n\omega\frac{T}{2}\right) - 1\right]\right). \end{aligned}$$

Or on a la relation suivante, à utiliser systématiquement : $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, et par conséquent $\omega T = 2\pi$.
Comme $\sin(n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$, il vient finalement

$$a_n = \frac{4}{n^2\omega^2 T}\left[(-1)^n - 1\right] = \frac{4T}{n^2(\omega T)^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \frac{T}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right].$$

La présence de l'expression $\left[(-1)^n - 1\right]$ incite à distinguer les cas n pair $(n = 2p)$ et n impair $(n = 2p+1)$. On voit alors que

$$a_{2p} = 0 \text{ et } a_{2p+1} = \frac{-2T}{\pi^2 (2p+1)^2}.$$

5) La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et elle est T-périodique. Elle admet donc (théorème de Dirichlet) un développement en série de Fourier de la forme

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t).$$

6) Comme f est visiblement *continue* sur $\mathbb{R}$, en tout point on a $f(t^+) = f(t^-) = f(t)$. Le DSF de f s'écrit donc :

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R},\ f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t).$$

En remplaçant les a_n et les b_n par leurs valeurs, et en tenant compte du fait que b_n est toujours nul et a_n est nul si n est pair $(a_{2p} = 0)$, il vient

$$f(t) = \frac{T}{4} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) = \frac{T}{4} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} \cos[(2p+1)\omega t] = \frac{T}{4} - \frac{2T}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos[(2p+1)\omega t].$$

7) En faisant $t = 0$ dans cette égalité, on obtient, puisque $f(0) = 0$ par définition de f :

$$0 = \frac{T}{4} - \frac{2T}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \Rightarrow S = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

8) L'égalité de Bessel-Parseval s'écrit $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2\, dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2$. Puisque f est paire, on a d'abord

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2\, dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2\, dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t^2 dt = \frac{2}{T}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{T^2}{12}.$$

En remplaçant les a_n et b_n dans la formule de Bessel-Parseval, il vient

$$\frac{T^2}{12} = \frac{T^2}{16} + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}^2 = \frac{T^2}{16} + \frac{2T^2}{\pi^4}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

Après simplification par T^2, on en déduit

$$K = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16}\right) \times \frac{\pi^4}{2} = \left(\frac{4}{48} - \frac{3}{48}\right) \times \frac{\pi^4}{2} = \frac{\pi^4}{96}.$$

<u>Exercice 2</u> : 1) Sur $[0, T]$, la représentation graphique de f coïncide avec la première bissectrice $y = t$. On complète par périodicité. D'où le graphe (fonction "en dent de scie") :

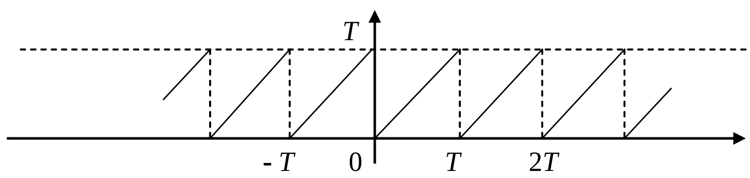


Figure 5 : Signal "en dent de scie"

2) Ici f n'est ni paire ni impaire, il faut donc calculer tous les coefficients. D'abord

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T t dt = \frac{1}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T = \frac{T}{2}.$$

Ensuite, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T t\cos(n\omega t)\,dt.$

Comme dans l'exercice 1, on intègre par parties en posant $u = t$ et $v' = \cos(n\omega t)$. Il vient

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\left(\left[\frac{1}{n\omega}t\sin(n\omega t)\right]_0^T - \frac{1}{n\omega}\int_0^T \sin(n\omega t)\,dt\right) = \frac{2}{n\omega T}\left(T\sin(n\omega T) + \left[\frac{1}{n\omega}\cos(n\omega t)\right]_0^T\right) \\ &= \frac{2}{n\omega T}\left(T\sin(2n\pi) + \frac{1}{n\omega}[\cos(2n\pi) - 1]\right). \end{aligned}$$

Donc $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ car $\sin(2n\pi) = 0$ et $\cos(2n\pi) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T t\sin(n\omega t)\,dt.$$

Comme précédemment, on intègre par parties en posant $u = t$ et $v' = \sin(n\omega t)$. Il vient

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\left(\left[-\frac{1}{n\omega}t\cos(n\omega t)\right]_0^T + \frac{1}{n\omega}\int_0^T \cos(n\omega t)\,dt\right) = \frac{2}{n\omega T}\left(-T\cos(n\omega T) + \left[\frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\right]_0^T\right) \\ &= \frac{2}{n\omega T}\left(-T\cos(2n\pi) + \frac{1}{n\omega}\sin(2n\pi)\right) = -\frac{2}{n\omega} = -\frac{T}{n\pi} \end{aligned}$$

car $\sin(2n\pi) = 0$ et $\cos(2n\pi) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et elle est T-périodique. Elle admet donc (théorème de Dirichlet) un développement en série de Fourier de la forme

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t).$$

5) Comme f admet des points de discontinuité (en $-T$, 0, T, $2T$, etc), on ne peut pas remplacer $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ par $f(t)$.

6) En remplaçant les a_n et les b_n par leurs valeurs (ici $a_n = 0$ pour $n \geq 1$), il vient pour tout t réel

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{T}{2} - \frac{T}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(n\omega t).$$

La fonction f est continue en $t = \frac{T}{4}$, de telle sorte que $f\left(\frac{T}{4}^+\right) = f\left(\frac{T}{4}^-\right) = \frac{T}{4}$. En remplaçant t par $\frac{T}{4}$ dans le développement en série de Fourier de f, on obtient :

$$\frac{T}{4} = \frac{T}{2} - \frac{T}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\left(n\omega\frac{T}{4}\right) = \frac{T}{2} - \frac{T}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right). \tag{36}$$

Or si n est pair, avec $n = 2p$, on a $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sin p\pi = 0$.

Si n est impair, on pose $n = 2p + 1$ et on voit que $\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) = \cos(p\pi) = (-1)^p$.

En remplaçant dans l'égalité (36), il vient

$$\frac{T}{4} = \frac{T}{2} - \frac{T}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{T}{2} - \frac{T}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

Donc on a $\frac{T}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{T}{2} - \frac{T}{4} = \frac{T}{4}.$

Ainsi on a, après simplification par T, $\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p}{2p+1}=\dfrac{1}{4}$, d'où $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p}{2p+1}=\dfrac{\pi}{4}$.

7) L'égalité de Bessel-Parseval s'écrit

$$\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\, dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

En remplaçant les a_n et les b_n, il vient

$$\frac{1}{T}\int_0^T t^2\, dt = \frac{T^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \Leftrightarrow \frac{T^2}{3} = \frac{T^2}{4} + \frac{T^2}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3 : 1) Sur l'intervalle $[0,\pi]$, $y = t(\pi - t) = -t^2 + \pi t$ est une *fonction du second degré*. Sa représentation graphique est donc une *parabole*. Le sommet de la parabole est le point d'abscisse t vérifiant $f'(t) = 0$, c'est-à-dire $y = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs on a $f(0) = f(\pi) = 0$ et $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$. D'où la représentation graphique de f sur $[0,\pi]$ (figure 6). On complète par symétrie par rapport à 0 (car f est impaire par définition), puis par périodicité (figure 7).

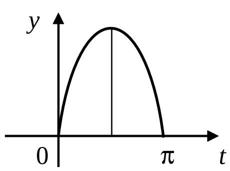


Figure 6

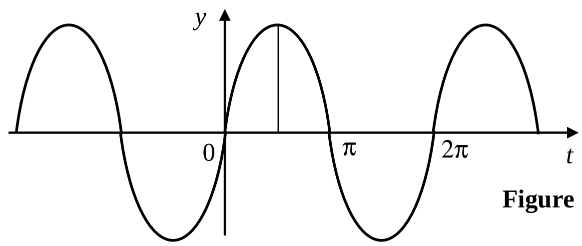


Figure 7

2) La fonction est impaire. On a donc $a_0 = 0$ et $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Pour le calcul des b_n, on tient compte du fait que f est impaire et on remplace **tout de suite** T par 2π et ω par 1 :

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\, dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\sin(nt)\, dt.$$

On peut calculer b_n grâce à deux intégrations par parties successives. On pose d'abord $u = t(\pi - t) = \pi t - t^2$ et $v' = \sin(nt)$. Alors $u' = \pi - 2t$ et $v = -\frac{1}{n}\cos(nt)$. Par conséquent

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\, t(\pi - t)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi - 2t)\cos(nt)\, dt\right) = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(\pi - 2t)\cos(nt)\, dt$$

car le crochet est nul pour $t = 0$ et $t = \pi$. On effectue une deuxième intégration par parties en posant $u = \pi - 2t$ et $v' = \cos(nt)$, de telle sorte que $u' = -2$ et $v = \frac{1}{n}\sin(nt)$.

Il vient $b_n = \dfrac{2}{n\pi}\left(\left[\dfrac{1}{n}(\pi - 2t)\sin(nt)\right]_0^{\pi} + \dfrac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)\, dt\right)$.

Ici à nouveau le crochet est nul car $\sin 0 = \sin n\pi = 0$. On a donc finalement

$$b_n = \frac{4}{\pi n^2}\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^3}(1 - \cos(n\pi)) = \frac{4}{\pi n^3}\left[1 - (-1)^n\right].$$

En distinguant les cas n pair et n impair, il en résulte immédiatement que $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \dfrac{8}{\pi(2p+1)^3}$.

3) La fonction est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et impaire. On a donc $a_0 = 0$ et $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. D'après le théorème de Dirichlet, elle peut se développer en série de Fourier sous la forme :

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt) \text{ car ici } \omega = 1.$$

En outre il est clair que f est continue en tout point t. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt). \tag{37}$$

En remplaçant les b_n par leurs valeurs il vient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} b_n \sin(nt) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p+1} \sin[(2p+1)t] = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^3} \sin[(2p+1)t].$$

4) En faisant $t = \frac{\pi}{2}$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^3} \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Or $\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(p\pi) = (-1)^p$. Par conséquent

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} \text{ , d'où } \quad S_1 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

5) Puisque $f(t)^2$ est paire, la formule de Bessel-Parseval s'écrit

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 (\pi - t)^2 \, dt = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p+1}^2 = \frac{32}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6}$$

Or on a

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 (\pi - t)^2 \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\pi^2 t^2 - 2\pi t^3 + t^4\right) dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^2 t^3}{3} - \frac{\pi t^4}{2} + \frac{t^5}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{30}.$$

On en déduit donc que $S_2 = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6} = \frac{\pi^2}{32} \times \frac{\pi^4}{30} = \frac{\pi^6}{960}$.

<u>Exercice 4</u> : 1) Le graphe de f est donné figure 8 :

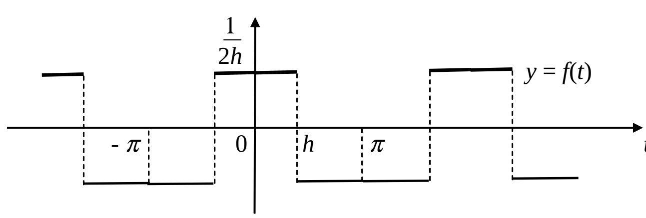


Figure 8

La fonction f est 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. De plus elle est paire. Elle admet donc un développement en série de Fourier de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt).$$

On a $a_0 = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\, dt = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{h} \dfrac{1}{2h} dt = \dfrac{1}{2\pi}$. Pour $n \geq 1$, on a

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{h} \frac{1}{2h} \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi n h} [\sin(nt)]_0^h = \frac{\sin(nh)}{\pi n h}.$$

D'où le DSF de f :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi h} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nh)}{n} \cos(nt).$$

2) a) La fonction f est continue en $t = 0$. Donc on a

$$f(0) = \frac{1}{2h} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi h}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nh)}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nh)}{n} = \frac{\pi h}{2}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\pi}\right) = \frac{\pi - h}{2}.$$

b) Pour $t = h$, on a $f(h^+) = 0$ et $f(h^-) = \frac{1}{2h}$. Par suite

$$\frac{f(h^+) + f(h^-)}{2} = \frac{1}{4h} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi h}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nh)}{n}\cos(nh).$$

Comme $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$, il vient

$$\frac{1}{4h} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi h}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2nh)}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2nh)}{n} = \frac{\pi h}{2}\left(\frac{1}{h} - \frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi - 2h}{2}.$$

3) En appliquant la formule de Bessel-Parseval, on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(t)]^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^h \frac{1}{4h^2}dt = \frac{1}{4\pi h} = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2 = \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2 h^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(nh)}{n^2}.$$

Par conséquent il vient finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(nh)}{n^2} = \frac{\pi h^2}{2}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\pi}\right) = \frac{h(\pi - h)}{2}.$$

Exercice 5 : 1) La représentation graphique de f est donnée ci-dessous :

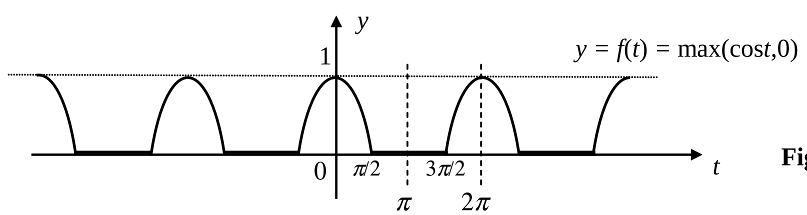


Figure 9

2) La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique (d'où $\omega = 1$). En outre, elle est continue en tout point et elle est paire. Pour tout t réel, on peut donc écrire

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nt).$$

3) Puisque f est paire, on a d'abord

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt = \frac{1}{\pi}[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}.$$

De même on écrit

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4) En utilisant la formule $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$, il vient

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(n+1)t + \cos(n-1)t]\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin[(n+1)t] + \frac{1}{n-1}\sin[(n-1)t]\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2}\right] + \frac{1}{n-1}\sin\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right]\right). \end{aligned}$$

On a donc $a_{2p+1} = 0$ et

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2p+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}+p\pi\right)+\frac{1}{2p-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+p\pi\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2p+1}\cos(p\pi)-\frac{1}{2p-1}\cos(p\pi)\right) \\ &= \frac{(-1)^p}{\pi}\left(\frac{1}{2p+1}-\frac{1}{2p-1}\right) = \frac{-2(-1)^p}{\pi}\times\frac{1}{4p^2-1} = \frac{2}{\pi}\times\frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1} \quad \text{car } -(-1)^p = (-1)^{p+1}. \end{aligned}$$

Pour tout t réel, on peut a donc le DSF suivant :

$$f(t) = a_0 + a_1\cos t + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n\cos(nt) = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos t + \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}\cos(2pt)$$

5) En faisant $t = 0$ dans le DSF précédent, on obtient

$$f(0) = 1 = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\times\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1} \Rightarrow S = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

En faisant $t = \frac{\pi}{2}$ dans le DSF précédent, on a $(-1)^{p+1}\cos(p\pi) = (-1)^{p+1}\times(-1)^p = (-1)^{2p+1} = -1$, d'où

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi}\times\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1} \Rightarrow T = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}.$$

6) Le théorème de Parseval s'écrit, puisque f^2 est paire et nulle sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = a_0^2+\frac{1}{2}a_1^2+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}a_{2p}^2.$$

Or $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{\pi}{4}$. En remplaçant les a_i par leurs valeurs, il vient

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{8}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2} \Rightarrow V = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right).$$

7) On procède par "glissement" en observant que

$$g(t) = \max(\sin t, 0) = \max\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right),0\right) = f\left(t-\frac{\pi}{2}\right).$$

En remplaçant t par $t-\frac{\pi}{2}$ dans le DSF de $f(t)$, on obtient donc

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}\cos(2pt-p\pi) \\ &= \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin t+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}(-1)^p\cos(2pt) = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin t-\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1}\cos(2pt) \end{aligned}$$