FORMULES DE CRAMER

Le but de ce complément est double :

1) Donner la démonstration élémentaire des formules de Cramer dans le cas d'un système de trois équations à trois inconnues [théorème 4.7, page 9 de "Toutes les mathématiques" (TLM1)].

2) Enoncer et démontrer les formules de Cramer dans le cas général d'un système de n équations à n inconnues, à partir de la théorie générale des déterminants (voir le document "Déterminants" sur le site touteslesmaths.fr).

1 Systèmes de trois équations à trois inconnues

Considérons un système (S) de trois équations linéaires à trois inconnues x, y et z :

$$(S)\quad \begin{cases} ax+by+cz=d & (1)\\ a'x+b'y+c'z=d' & (1')\\ a''x+b''y+c''z=d'' & (1'')\end{cases}$$

Nous allons démontrer les formules de Cramer par analyse et synthèse. Supposons donc d'abord que le système (S) a une solution (x,y,z). On effectue les opérations $c'\,(1)-c\,(1')\,,\ c''\,(1)-c\,(1'')\,,\ c''\,(1')-c'\,(1'')$ qui font disparaître z. On obtient les trois équations :

$$\begin{cases} (ac'-a'c)\,x+(bc'-b'c)\,y=dc'-d'c & (2)\\ (ac''-a''c)\,x+(bc''-b''c)\,y=dc''-d''c & (2')\\ (a'c''-a''c')\,x+(b'c''-b''c')\,y=d'c''-d''c' & (2'')\end{cases}$$

Si nous multiplions l'équation (2) par $-b''$, l'équation $(2')$ par b', l'équation $(2'')$ par $-b$, et additionnons le tout, y disparaît à son tour et nous obtenons

$$(a'b''c-ab''c'+ab'c''-\ a''b'c+a''bc'-\ a'bc'')x=d'b''c-db''c'+db'c''-d''b'c+d''bc'-\ d'bc''.$$

Ainsi, à condition que l'on ait $a'b''c-ab''c'+ab'c''-a''b'c+a''bc'-a'bc''\neq 0$, il vient

$$x=\frac{d'b''c-db''c'+db'c''-d''b'c+d''bc'-\ d'bc''}{a'b''c-ab''c'+ab'c''-\ a''b'c+a''bc'-\ a'bc''}.$$

Il est alors facile de vérifier que

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}\ \ ,\ \Delta=\begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix}\ \ ,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} d & b & c\\ d' & b' & c'\\ d'' & b'' & c''\end{vmatrix}. \qquad (1)$$

On obtiendrait de même

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}\ \ ,\ \Delta=\begin{vmatrix} a & d & c\\ a' & d' & c'\\ a'' & d'' & c''\end{vmatrix}\ \ ,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}\ \ ,\ \Delta_z=\begin{vmatrix} a & b & d\\ a' & b' & d'\\ a'' & b'' & d''\end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Réciproquement, soit Δ défini par (1). On suppose $\Delta\neq 0$. Soient x, y et z définis par (1) et (2). On a

$$\begin{aligned} ax+by+cz\ &=\ \frac{a}{\Delta}\,(d'b''c-db''c'+db'c''-d''b'c+d''bc'-\ d'bc'')\\ &\quad+\frac{b}{\Delta}\,(ad'c''-ac'd''-a'dc''+a'cd''+a''c'd-a''cd')\\ &\quad+\frac{c}{\Delta}\,(ab'd''-ab''d'-a'bd''+a'b''d+a''bd'-a''b'd)\,.\end{aligned}$$

Si on développe le tout, on observe que tous les termes contenant d' et d'' disparaissent. Il reste

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= \frac{1}{\Delta}\left(dab'c'' - dab''c' - da'bc'' + da''bc' + da'b''c - da''b'c\right) \\ &= \frac{d}{\Delta}\left(ab'c'' - ab''c' - a'bc'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c\right) = \frac{d}{\Delta} \times \Delta = d. \end{aligned}$$

Un calcul analogue montrerait que $a'x + b'y + c'z = d'$ et $a''x + b''y + c''z = d''$. Par conséquent x, y et z donnés par (1) et (2) sont bien solutions du système (S). Le théorème 4.7 de TLM1 est donc démontré.

2 Formules de Cramer dans le cas général

Considérons un système de n équations linéaires à n inconnues x_1, x_2, ..., x_n :

$$(\Sigma)\ \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Par définition, le *déterminant du système* (Σ) est

$$\Delta = |a_{ij}|_{1\le i\le n; 1\le j\le n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Si le déterminant Δ du système (Σ) est différent de 0, on dit que (Σ) est un *système de Cramer*. Le théorème suivant généralise les théorèmes 4.5 et 4.7.

Théorème 1 *Le système* (Σ) *admet une solution unique* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *si et seulement si c'est un système de Cramer. Dans ce cas, cette solution est donnée par les* formules de Cramer :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ \ x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

Dans ces formules, Δ *désigne le déterminant de* (Σ)*, et* Δ_i *le déterminant obtenu en remplaçant, dans* Δ*, la* i*-ème colonne par la colonne des* b_k *qui figurent dans le second membre de* (Σ).

Démonstration Démontrons d'abord par récurrence que (Σ) admet une solution unique $(x_1, x_2, ..., x_n)$ si et seulement si c'est un système de Cramer. La propriété est vraie pour $n = 2$ (théorème 4.5 de TLM1). Supposons-la vraie à l'ordre $n-1$, et montrons qu'elle est vraie à l'ordre n. Dans le système (Σ), l'un au moins des a_{in} est différent de 0 (sinon le système n'a que $n-1$ inconnues). Comme permuter les équations revient à permuter les lignes de Δ, on peut supposer que $a_{1n} \neq 0$ (sinon, on place en première équation celle pour laquelle $a_{in} \neq 0$, ce qui peut changer le signe de Δ, mais pas le fait qu'il soit nul ou non).

En utilisant la méthode du *pivot de Gauss*, on conserve la première équation, et on effectue les opérations suivantes sur les lignes 2, ..., n :

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{2n}}{a_{1n}} L_1 \ \ , \ ... \ , \ L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{nn}}{a_{1n}} L_1 .$$

Ces opérations font disparaître l'inconnue x_n dans les équation 2, ..., n, et il vient :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \left(a_{21} - \dfrac{a_{2n}}{a_{1n}}a_{11}\right)x_1 + \cdots + \left(a_{2,n-1} - \dfrac{a_{2n}}{a_{1n}}a_{1,n-1}\right)x_{n-1} = b_2 \\ \vdots \\ \left(a_{n1} - \dfrac{a_{nn}}{a_{1n}}a_{11}\right)x_1 + \cdots + \left(a_{n,n-1} - \dfrac{a_{nn}}{a_{1n}}a_{1,n-1}\right)x_{n-1} = b_n \end{array} \right. \tag{3}$$

Le déterminant de ce système vaut Δ, car il a été obtenu à partir de Δ grâce aux opérations

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{2n}}{a_{1n}} L_1 \ , \ \ldots \ , \ L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{nn}}{a_{1n}} L_1,$$

qui ne changent pas la valeur d'un déterminant. En le développant par rapport à la dernière colonne, il vient

$$\Delta = (-1)^{n-1} \, a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} - \frac{a_{2n}}{a_{1n}} a_{11} & \cdots & a_{2,n-1} - \frac{a_{2n}}{a_{1n}} a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - \frac{a_{nn}}{a_{1n}} a_{11} & & a_{n,n-1} - \frac{a_{nn}}{a_{1n}} a_{1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Donc le déterminant du système formé par les $n-1$ dernières équations dans (3) est différent de zéro si et seulement si $\Delta \neq 0$. Par hypothèse de récurrence, ce sous-système admet une solution unique $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ si et seulement si $\Delta \neq 0$. En utilisant la première équation de (3), on voit donc que (Σ) admet une solution unique $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ si et seulement si $\Delta \neq 0$.

Il reste à montrer que cette solution est bien donnée par les formules de Cramer. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ l'unique solution de (Σ). On a par exemple :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne, il vient

$$\Delta_1 = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + x_n \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2n} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{nn} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Or les déterminants en facteur de x_2, ..., x_n sont nuls car ils ont deux colonnes identiques.
De plus, le déterminant en facteur de x_1 est Δ. Donc $\Delta_1 = x_1 \Delta$, c'est-à-dire $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.
La démonstration est identique pour les autres x_i.