FONCTIONS EXPONENTIELLES

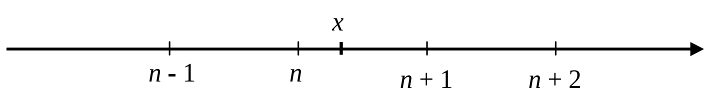
Le but de ce complément est de démontrer les propriétés fondamentales des fonctions exponentielles, admises dans TLM1, chapitre 12. Auparavant, nous préciserons les rapports entre nombres rationnels et nombres réels.

1 Nombres rationnels et nombres réels

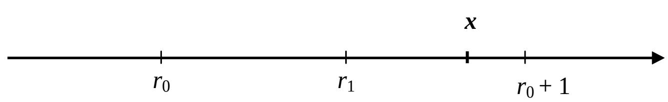
Rappelons que les *nombres rationnels* sont les quotients de deux entiers $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, et que l'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$. On a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, et $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ (TLM1, exemple 36.14 page 466).

Théorème 1 *Pour tout nombre réel x, il existe une suite de nombres rationnels r_n croissante telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$.

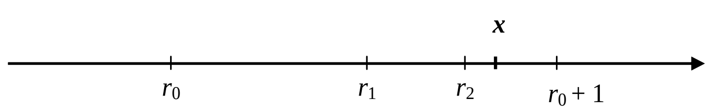
Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe un entier unique n tel que $n \leq x < n+1$. Cet entier s'appelle la partie entière de x et se note $E(x)$ (TLM1 page 485). Graphiquement, cela signifie qu'on commence par encadrer x par deux entiers $n = E(x)$ et $n + 1 = E(x) + 1$ consécutifs :



On procède par *dichotomie*. Posons d'abord $r_0 = n = E(x)$, Puis divisons l'intervalle $[r_0, r_0 + 1]$ en 2 intervalles égaux. On prend pour r_1 la borne inférieure de l'intervalle contenant x (voir par exemple figure ci-dessous).



Puis on subdivise l'intervalle $\left[r_1, r_1 + \frac{1}{2}\right]$ en 2 intervalles égaux. On prend pour r_2 la borne inférieure de l'intervalle contenant x :



En poursuivant le procédé, on voit qu'on construit une suite de rationnels r_n croissante, puisque $r_n \leq r_{n+1}$ (l'égalité est possible ; dans le cas du schéma ci-dessus, on a manifestement $r_3 = r_2$, par exemple). De plus, on a par construction

$$r_n \leq x \leq r_n + \frac{1}{2^n} \tag{1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $0 \leq x - r_n \leq \frac{1}{2^n}$. Donc $\lim_{n \to +\infty} r_n = x$ par encadrement, ce qui démontre le théorème 1.

Remarque 1 Le procédé précédent donne le *développement de x en base* 2. La suite r_n s'écrit en effet

$$r_1 = r_0 + \frac{a_1}{2}, \quad r_2 = r_1 + \frac{a_2}{2^2} = r_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2}, \quad r_3 = r_2 + \frac{a_3}{2^3} = r_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} \cdots,$$

où $a_n = 0$ ou 1. Si on remplace 2 par 10, la suite r_n est la suite des *approximations décimales par défaut* de x. La suite $r_n + \frac{1}{10^n}$ est la suite des *approximations décimales par excès*. En effet, on voit par la construction précédente que

$$r_1 = r_0 + \frac{a_1}{10}, \quad r_2 = r_1 + \frac{a_2}{10^2} = r_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \quad r_3 = r_2 + \frac{a_3}{10^3} = r_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} \cdots ,$$

où $a_1, a_2, a_3, \cdots$ est une suite d'entiers compris entre 0 et 9 (ou chiffres). Ce qu'on écrit également

$$x = r_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} \cdots = r_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}. \tag{2}$$

2 Fonctions exponentielles

Soit $a > 1$ un nombre réel. Comme on l'a vu dans TLM1, page 134, l'idée des fonctions exponentielles est de placer la variable x en *exposant*, de telle sorte que la *fonction exponentielle de base* a est la fonction

$$f_a(x) = a^x. \tag{3}$$

Pour l'instant, cette fonction n'est définie que pour $x \in \mathbb{Q}$ (voir TLM1, page 123 et le complément *Exposants rationnels* sur le site http ://toutesles maths.fr). Il convient donc de la *prolonger* pour $x \in \mathbb{R}$.

Soit donc r_n une suite croissante de rationnels convergeant vers le réel x (définie par théorème 1 ci-dessus). Alors (voir exercice 1) la fonction $r \to a^r$ est croissante de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Il en résulte que :
- La suite $v_n = a^{r_n}$ est croissante car $v_{n+1} = a^{r_{n+1}} \geq a^{r_n} = v_n$.
- On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a^{r_n} \leq a^{E(x)+1}$.
La suite v_n est donc croissante et majorée, par conséquent elle converge (théorème des suites monotones, TLM1 page 388). On pose

$$a^x = \lim_{n \to +\infty} \left(a^{r_n}\right). \tag{4}$$

Pour que cette *définition* ait un sens, il faut évidemment prouver que la limite de $v_n = a^{r_n}$ a une valeur *indépendante* de la suite r_n choisie, ce qui résulte de l'exercice 2.

La fonction exponentielle de base $a > 1$ étant ainsi parfaitement définie, nous démontrons la *propriété fondamentale.*

Théorème 2 Soit $a > 1$. *Pour tout couple* (x, y) *de nombres réels*,

$$a^{x+y} = a^x a^y. \tag{5}$$

Démonstration Soient r_n et s_n deux suites croissantes de rationnels convergeant vers x et y respectivement. Alors $r_n + s_n$ est une suite croissante de rationnels convergeant vers $x + y$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a^{r_n + s_n} = a^{r_n} a^{s_n}$ car r_n et s_n sont *rationnels* (théorème 7 du complément *Exposants rationnels*). En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $a^{x+y} = a^x a^y$ par définition de l'exponentielle de base a (formule (4)).

On en déduit immédiatement les formules :

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad , \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}. \tag{6}$$

La première s'obtient en remplaçant y par $-x$ dans la propriété fondamentale.
La deuxième s'obtient en remplaçant y par $-y$ dans la propriété fondamentale.

Une autre conséquence immédiate de la propriété fondamentale est que la fonction exponentielle de base $a > 1$ est *strictement positive*, c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$a^x > 0.$$

En effet, on a d'abord $a^x = a^{\frac{x}{2} + \frac{x}{2}} = a^{\frac{x}{2}} a^{\frac{x}{2}} = \left(a^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$.
Démontrons ensuite par l'absurde que a^x ne peut s'annuler : s'il existait x_0 tel que $a^{x_0} = 0$, alors pour tout x réel, on aurait $a^x = a^{x - x_0 + x_0} = a^{x - x_0} a^{x_0} = 0$, ce qui est impossible car $a^0 = 1$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x \neq 0$ et $a^x \geq 0 \Rightarrow a^x > 0$.

Théorème 3 *La fonction exponentielle de base* a *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$(a^x)' = \tau(a) . a^x. \tag{7}$$

En fait, la fonction τ est le logarithme népérien (TLM1, page 141).

Démonstration Ce théorème est relativement difficile à démontrer, et nous allons procéder en plusieurs étapes.
a) Soit la suite u_n définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{a^n - 1}{n}. \tag{8}$$

Nous allons démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, $a > 1$, la suite u_n est strictement croissante. On a d'abord

$$u_{n+1} - u_n = \frac{a^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{a^n - 1}{n} = \frac{ana^n - n - (n+1)a^n + n + 1}{n(n+1)} = \frac{(an - n - 1)\, a^n + 1}{n(n+1)} = \frac{t_n}{n(n+1)}, \tag{9}$$

où on a posé $t_n = (an - n - 1)\, a^n + 1$. On notera que t_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $t_0 = 0$. Cependant

$$t_{n+1} - t_n = a(a\,(n+1) - n - 2)a^n - (an - n - 1)\, a^n = \left(a^2\,(n+1) - 2a\,(n+1) + n + 1\right) a^n = (n+1)(a-1)^2 a^n.$$

Ainsi $t_{n+1} - t_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite t_n est donc strictement croissante. Puisque $t_0 = 0$, cela prouve que $t_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ et ainsi u_n est strictement croissante en vertu de (9).
b) Soit la fonction g_a définie pour tout rationnel $r > 0$ par

$$g_a(r) = \frac{a^r - 1}{r}. \tag{10}$$

Alors g_a est strictement croissante de $\mathbb{Q}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. En effet, si r et s sont deux rationnels strictement positifs avec $r < s$, on peut écrire après réduction au même dénominateur $r = \frac{p}{q}$ et $s = \frac{t}{q}$ avec $p < t$, p, t, $q \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'étape a) de la démontration et les propriétés des exposants, il vient

$$\frac{a^r - 1}{r} = q\frac{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p - 1}{p} < q\frac{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^t - 1}{t} = \frac{a^s - 1}{s}, \text{ C.Q.F.D.}$$

c) Soit la fonction h_a définie pour tout réel $x > 0$ par

$$h_a(x) = \frac{a^x - 1}{x}. \tag{11}$$

Alors h_a est croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. En effet, si x et y sont deux réels strictement positifs avec $x < y$, on peut trouver deux suites r_n et s_n de rationnels croissantes telles que

$$x = \lim_{n \to +\infty} r_n \text{ et } y = \lim_{n \to +\infty} s_n. \tag{12}$$

En outre, par définition de la limite de la suite s_n (TLM1 page 385), il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$r_n \leq x < s_n \leq y.$$

En utilisant l'étape b), on en déduit que pour tout $n \geq N$

$$\frac{a^{r_n} - 1}{r_n} < \frac{a^{s_n} - 1}{s_n}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit par passage à la limite

$$\frac{a^x - 1}{x} \leq \frac{a^y - 1}{y}, \text{ C.Q.F.D.}$$

d) La fonction h_a est croissante de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, et en outre elle est minorée par 0 (exercice 3). Donc elle a une limite finie, que nous noterons $\tau(a)$, lorsque x tend vers 0 à droite. Cela prouve que la fonction exponentielle de base a est dérivable *à droite* en 0, avec

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{a^x - 1}{x} = \tau(a). \tag{13}$$

e) Etudions maintenant la dérivabilité à gauche. Pour $x < 0$, on a

$$\frac{a^x - 1}{x} = a^x \frac{a^{-x} - 1}{-x}.$$

Puisque $\lim_{x\to 0} a^x = 1$ (exercice 4), on déduit de l'étape d) que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(a^x \frac{a^{-x} - 1}{-x} \right) = 1 \times \tau(a) = \tau(a).$$

Ainsi la fonction exponentielle de base a est dérivable à gauche en 0 et sa dérivée à gauche est égale à sa dérivée à droite. Elle est donc dérivable en 0 et on peut écrire

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \tau(a). \tag{14}$$

f) Finalement, montrons que la fonction exponentielle de base a est dérivable en tout point x en calculant la limite du taux d'accroissement en x :

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{a^x a^h - a^x}{h} \right) = a^x \lim_{h\to 0} \left(\frac{a^h - 1}{h} \right) = \tau(a)a^x, \text{ C.Q.F.D.}$$

Remarque 2 Puisque la fonction exponentielle de base a est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour toute suite de rationnels r_n (non nécessairement croissante) convergeant vers x, on a

$$a^x = \lim_{n\to+\infty} (a^{r_n}). \tag{15}$$

Théorème 4 *Pour tout couple* (x, y) *de nombres réels,*

$$a^{xy} = (a^x)^y. \tag{16}$$

Démonstration Soit d'abord s un nombre *rationnel.* Soit r_n une suite de rationnels convergeant vers x. Alors $r_n s$ est une suite de *rationnels* convergeant vers xs. En vertu du théorème 9 du complément *Exposants rationnels*, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{r_n s} = (a^{r_n})^s$. Lorsque n tend vers l'infini, $a^{r_n s}$ tend vers a^{xs} et a^{r_n} tend vers a^x (voir remarque 2), donc $(a^{r_n})^s$ tend vers $(a^x)^s$. En effet, la fonction $t \to t^s$ est continue sur $]0,+\infty[$ car dérivable par le théorème 11.2 page 125 de TLM1.

En passant à la limite dans la relation $a^{r_n s} = (a^{r_n})^s$, on obtient donc $a^{xs} = (a^x)^s$ pour tout rationnel s et tout réel x.

Soit maintenant s_n une suite de rationnels convergeant vers le nombre réel y. D'après ce qui précède, on a $a^{xs_n} = (a^x)^{s_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $xs_n \to xy$ lorsque $n \to +\infty$, donc $a^{xs_n} \to a^{xy}$ par continuité de la fonction exponentielle de base a. De même $(a^x)^{s_n} \to (a^x)^y$ par continuité de la fonction exponentielle de base a^x. Ainsi en passant à la limite dans la relation $a^{xs_n} = (a^x)^{s_n}$ on obtient le théorème 4.

3 Définition du nombre *e*

Parmi toutes les fonctions exponentielles, on distingue la fonction exponentielle de base e, appelée plus simplement, à cause de ses remarquables propriétés, *la fonction exponentielle.* On a vu, dans le théorème 3, que la dérivée de a^x est proportionnelle à a^x, le coefficient de proportionnalité étant la dérivée $\tau(a)$ en 0, c'est-à-dire

$$\tau(a) = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}. \tag{17}$$

Le nombre e est défini à partir du théorème ci-dessous :

Théorème 5 *Il existe un unique nombre* $e > 1$ *tel que* $\tau(e) = 1$, *c'est-à-dire que pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$(e^x)' = e^x. \tag{18}$$

Une valeur approchée de e *est* $e \simeq 2,71828$.

Démonstration La fonction $\tau : a \to \tau(a)$ est définie pour tout $a > 1$.

a) Le point délicat consiste à démontrer que la fonction τ est continue sur $]1, +\infty[$. On sait (exercice 2, c) que pour tout $r \in \mathbb{Q}$ vérifiant $-1 < r < 1$ et pour tout réel $t \geq 0$

$$1 - |r|.t \leq (1+t)^r \leq 1 + |r|.t.$$

Fixons $t \geq 0$ pour l'instant. Par définition de l'exponentielle de base $1 + t$ et passage à la limite, on en déduit que pour tout réel $x \in]0, 1[$

$$1 - xt \leq (1+t)^x \leq 1 + xt.$$

Par conséquent, si $x \in]0, 1[$, on a

$$-t \leq \frac{(1+t)^x - 1}{x} \leq t. \tag{19}$$

Soit maintenant $a > 1$ fixé, et soit $h > 0$. On a pour tout $x \in]0, 1[$

$$\frac{(a+h)^x - 1}{x} - \frac{a^x - 1}{x} = \frac{(a+h)^x - a^x}{x} = a^x \frac{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^x - 1}{x},$$

ce qui implique en utilisant (19)

$$-a^x \frac{h}{a} \leq \frac{(a+h)^x - 1}{x} - \frac{a^x - 1}{x} \leq a^x \frac{h}{a}.$$

En faisant tendre x vers 0^+, on en déduit que pour tout $h > 0$

$$-\frac{h}{a} \leq \tau(a+h) - \tau(a) \leq \frac{h}{a}.$$

On en déduit que $\lim_{h \to 0^+} \tau(a+h) = \tau(a)$, ce qui prouve que τ est continue à droite au point a. Pour démontrer qu'elle est également continue à gauche, soit $a > 1$ fixé et $h < 0$ suffisamment petit en valeur absolue pour que $a + h > 1$. Pour tout $x \in]0, 1[$, on écrit

$$\frac{a^x - 1}{x} - \frac{(a+h)^x - 1}{x} = \frac{a^x - (a+h)^x}{x} = (a+h)^x \frac{\left(\frac{a}{a+h}\right)^x - 1}{x} = (a+h)^x \frac{\left(1 - \frac{h}{a+h}\right)^x - 1}{x}.$$

En utilisant (19) à nouveau, il vient

$$(a+h)^x \frac{h}{a+h} \leq \frac{a^x - 1}{x} - \frac{(a+h)^x - 1}{x} \leq -(a+h)^x \frac{h}{a+h}.$$

En faisant tendre x vers 0^+, on obtient

$$\frac{h}{a+h} \leq \tau(a) - \tau(a+h) \leq \frac{-h}{a+h}.$$

On en déduit par encadrement que $\lim_{h \to 0^-} \tau(a+h) = \tau(a)$ ce qui prouve que τ est également continue à gauche au point a, C.Q.F.D.

b) Montrons maintenant que la fonction τ est croissante sur $]1, +\infty[$. Soit donc a et b deux réels tels que $1 < a < b$. Alors pour tout rationnel $r > 0$, la fonction puissance $a \to a^r$ est croissante car sa dérivée est $ra^{r-1} > 0$ (TLM1, théorème 11.2 page 125). Ainsi $a < b \Rightarrow a^r < b^r$. Par passage à la limite, on en déduit $a^x \leq b^x$ pour tout $x > 0$. Ainsi pour tout $x > 0$

$$\frac{a^x - 1}{x} \leq \frac{b^x - 1}{x}.$$

En faisant tendre x vers 0^+, il vient $\tau(a) \leq \tau(b)$, C.Q.F.D.

c) Montrons maintenant que la fonction τ est strictement croissante sur $]1,+\infty[$. Puisqu'on sait déjà qu'elle est croissante, il suffit de démontrer que $a \neq b \Rightarrow \tau(a) \neq \tau(b)$, c'est-à-dire que τ est injective. Raisonnons par contraposition, et supposons que $\tau(a) = \tau(b)$. En vertu du théorème 3, on a donc

$$(a^x)'b^x - a^x\,(b^x)' = a^x b^x\,(\tau(a) - \tau(b)) = 0.$$

Par conséquent

$$\left(\frac{a^x}{b^x}\right)' = \frac{(a^x)'b^x - a^x\,(b^x)'}{b^{2x}} = 0.$$

Il existe donc une constante C telle que $\frac{a^x}{b^x} = C$ pour tout x réel. En faisant $x = 0$ il vient $C = 1$.
Pour tout x réel on a donc $a^x = b^x$, ce qui implique $a = b$, C.Q.F.D.
d) Montrons maintenant que $\lim_{a\to+\infty} \tau(a) = +\infty$. Pour cela, observons que, pour tout $a > 1$,

$$\frac{(a^2)^x - 1}{x} = 2 \times \frac{a^{2x} - 1}{2x},$$

de telle sorte qu'en faisant tendre x vers 0, on voit que τ vérifie l'*équation fonctionnelle*

$$\tau\left(a^2\right) = 2\tau(a). \tag{20}$$

Or τ est strictement *croissante* sur $]1,+\infty[$. Donc $\tau(a)$ admet une limite finie l lorsque a tend vers $+\infty$, ou bien $\tau(a)$ tend vers $+\infty$. Si $\tau(a)$ admettait une limite finie l lorsque a tend vers $+\infty$, alors en passant à la limite dans (20), on aurait $l = 2l$, c'est-à-dire $l = 0$. Or ceci est impossible car $\tau(a) > 0$ et τ est croissante. On a donc $\lim_{a\to+\infty} \tau(a) = +\infty$.
e) Montrons enfin que $\lim_{a\to1^+} \tau(a) = 0$. Puisque τ est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ et minorée par 0, $\tau(a)$ admet une limite finie l lorsque a tend vers 1^+. En faisant tendre a vers 1^+ dans (20), on obtient comme précédemment $l = 2l$, d'où $l = 0$, C.Q.F.D.
f) Il résulte de a), b), c), d) et e) que τ est strictement croissante et continue de $]1,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$. D'après le *théorème des valeurs intermédiaires* (TLM1 page 490), il existe donc un réel $e \in]1,+\infty[$ tel que $\tau(e) = 1$. Et ce réel est unique car τ est strictement croissante, ce qui achève la démonstration du théorème 5.

Remarque 3 Une méthode de calcul de la valeur numérique de e se trouve dans TLM1, exemple 39.5 page 506.

Remarque 4 Le raisonnement de la partie f) de la démonstration ci-dessus se généralise immédiatement pour donner le *théorème de la bijection* : si f est strictement monotone et continue sur l'intervalle I, alors f est une bijection de I dans $f(I)$.

EXERCICES

Exercice 1 Soit $a \in \mathbb{R}$, avec $a > 1$. Démontrer que la fonction $r \to a^r$ est croissante de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 1) Soit $r \in \mathbb{Q}$, avec $0 \leq r < 1$. Etudier les variations de la fonction $f_r(t) = (1+t)^r - 1 - rt$ sur $[0,+\infty[$. En déduire que, pour tout $t \geq 0$,

$$1 \leq (1+t)^r \leq 1 + rt.$$

2) Soit $r \in \mathbb{Q}$, avec $r < 0$. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $1 + rt \leq (1+t)^r \leq 1$.
3) Démontrer que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$ vérifiant $-1 < r < 1$, on a pour tout $t \geq 0$

$$1 - |r|.t \leq (1+t)^r \leq 1 + |r|.t.$$

4) Montrer que la limite de a^{r_n} est indépendante de la suite r_n croissante convergeant vers le réel x.

Exercice 3 Démontrer que, pour tout réel $a > 1$ et tout réel $x > 0$, on a $a^x > 1$.

Exercice 4 Soit $a \in \mathbb{R}$, avec $a > 1$. Démontrer que $\lim_{x\to0} a^x = 1$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 1 Soient $r < s$ deux rationnels. On peut écrire après réduction au même dénominateur

$$r = \frac{m}{d},\ \ s = \frac{n}{d},\ \ d \in \mathbb{N}^*,\ \ m, n \in \mathbb{Z},\ \ m < n.$$

Alors $a^s - a^r = a^r\left(a^{s-r} - 1\right) = a^r\left(\left(a^{\frac{1}{d}}\right)^{n-m} - 1\right) > 0$ car $a^{\frac{1}{d}} > 1$ et $n - m \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 1) f_r est dérivable sur $]0, +\infty[$ en vertu du théorème 11.2 page 125 de TLM1 et

$$f_r{}'(t) = r(1+t)^{r-1} - r = r\left[(1+t)^{r-1} - 1\right].$$

Or $1 + t \geq 1$ et $r - 1 < 0$. Par conséquent $(1+t)^{r-1} \leq 1$ et $f_r{}'(t) \leq 0$. Donc f_r est *décroissante* sur $[0, +\infty[$. Comme $f_r(0) = 0$, on en déduit que $f_r(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, c'est-à-dire $(1+t)^r \leq 1 + rt$. Comme par ailleurs $r \geq 0$ et $1 + t \geq 1$, on a aussi $(1+t)^r \geq 1$, d'où l'encadrement $1 \leq (1+t)^r \leq 1 + rt$.

2) On étudie de même $g_r(t) = (1+t)^r - 1 - tx$ pour $t \geq 0$. On a de nouveau $g_r{}'(t) = r(1+t)^{r-1} - r = r\left[(1+t)^{r-1} - 1\right]$ Comme pour f_r, le crochet est négatif, et à cause de $r < 0$ devant on voit que $g_r'(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Or $g_r(0) = 0$, donc $g_r(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, c'est-à-dire $(1+t)^r \geq 1 + rt$. Comme $r < 0$ et $1 + t \geq 1$, on a aussi $(1+t)^r \leq 1$, d'où l'encadrement $1 + rt \leq (1+t)^r \leq 1$.

3) D'après la question 1, on pour tout $t \geq 0$ et tout $r \in [0, 1[$

$$1 - rt \leq 1 \leq (1+t)^r \leq 1 + rt \Leftrightarrow 1 - |r|\,t \leq 1 \leq (1+t)^r \leq 1 + |r|\,t$$

car $r \geq 0$. Si $r \in]-1, 0[$, d'après la question 2 on a

$$1 + rt \leq (1+t)^r \leq 1 \leq 1 - rt \Leftrightarrow 1 - |r|\,t \leq 1 \leq (1+t)^r \leq 1 + |r|\,t,$$

puisque dans ce cas $|r| = -r$. Ainsi pour tout rationnel $r \in]-1, 1[$ et tout réel $t \geq 0$ on a

$$1 - |r|\,t \leq (1+t)^r \leq 1 + |r|\,t.$$

4) Posons $t = a - 1$. L'encadrement précédent s'écrit, pour tout rationnel r :

$$1 - |r|\,(a-1) \leq a^r \leq 1 + |r|\,(a-1).$$

Soit maintenant r_n et s_n deux suites croissantes de rationnels telle que $\lim r_n = x$ et $\lim s_n = x$. Il s'agit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}$. D'après le résultat ci-dessus, on peut écrire

$$1 - |r_n - s_n|\,(a-1) \leq a^{r_n - s_n} \leq 1 + |r_n - s_n|\,(a-1).$$

Or on a $r_n - s_n \to x - x = 0$, donc par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{r_n}}{a^{s_n}} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n - s_n} = 1.$$

D'où le résultat. On notera qu'on n'a pas utilisé le fait que r_n et s_n sont croissantes.

Exercice 3 On sait (exercice 1) que la fonction $r \to a^r$ est croissante de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Soit maintenant un réel $x > 0$, et soit r_n une suite croissante de rationnels convergeant vers x. Par définition de la limite (TLM1 page 385), il existe donc un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $0 < r_n < x$. On a donc pour tout n assez grand

$$a^0 < a^{r_N} \leq a^{r_n}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il en résulte que $1 < a^{r_N} < a^x$, c.q.f.d.

Exercice 4 On a vu dans l'exercice 2, début de la question 4, que pour tout rationnel $r \in]-1, 1[$,

$$1 - |r|\,(a-1) \leq a^r \leq 1 + |r|\,(a-1).$$

Soit maintenant $x]-1,1[$. Alors il existe une suite de rationnels r_n telle que $\lim_{n\to+\infty} r_n = x$ et $r_n \in]-1,1[$ pour tout n assez grand. L'encadrement précédent s'écrit

$$1 - |r_n|\,(a-1) \leq a^{r_n} \leq 1 + |r_n|\,(a-1),$$

et par passage à la limite on voit que, pour tout réel $x \in]-1,1[$,

$$1 - |x|\,(a-1) \leq a^{x} \leq 1 + |x|\,(a-1).$$

En faisant tendre x vers 0, on en déduit par encadrement $\lim_{x\to 0} a^x = 1$.