BASES D'UN ESPACE VECTORIEL

Le but de ce complément, de nature théorique, est de compléter la sous-section 45.3.3 (page 593) de TLM1, concernant les espaces vectoriels de dimension finie, et aussi de démontrer le théorème du rang (page 608 de TLM1). Définissons d'abord précisément ce qu'est un espace vectoriel de *dimension finie* :

Définition 1 *On dit que* E *est un* espace vectoriel de dimension finie *si* $E = \{0\}$ *ou si* E *est engendré par un nombre fini de vecteurs. Les espaces de dimension finie sont donc les espaces de la forme* $E = \text{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$ *avec* $n \in \mathbb{N}$, avec la convention $E = \{0\}$ si $n = 0$.

Si $n = 0$, on pose naturellement $\dim E = \dim \{0\} = 0$.

1 Théorème de la base incomplète

Il s'énonce de la façon suivante.

Théorème 1 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie*, $E \neq \{0\}$. *Soit* $\mathcal{G} = (x_1, \cdots, x_p)$ *une famille* génératrice *de* E, *et* $\mathcal{L}$ *une sous-famille* libre *de* $\mathcal{G}$. *Alors il existe une sous-famille* $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{G}$ *telle que* $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ *et* $\mathcal{B}$ *est une* base *de* E.

En d'autres termes, on peut *compléter* $\mathcal{L}$ en une base de E en utilisant des éléments de $\mathcal{G}$.

Démonstration L'idée de la démonstration du théorème de la base incomplète est qu'une base est une famille libre *de cardinal maximal*. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\mathcal{L} = (x_1, \cdots, x_k)$, avec $k \leq p$ (il suffit de renommer les vecteurs).

Si $k = p$, alors $\mathcal{L} = \mathcal{G}$ est à la fois libre et génératrice, et il n'y a rien à démontrer car c'est déjà une base de E.

Si $k < p$, alors $x_{k+1} \notin \mathcal{L}$ et $x_{k+1} \in \mathcal{G}$. Deux cas peuvent se produire :

a) Ou bien $x_{k+1} \in \text{Vect}(\mathcal{L})$ et la famille $(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1})$ est liée. On pose alors $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$.

b) Ou bien $x \notin \text{Vect}(\mathcal{L})$ et la famille $(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1})$ est libre. On pose alors $\mathcal{L}_2 = (x_1, \cdots, x_k, x_{k+1})$.

En itérant ce procédé, on construit une suite de familles libres de cardinaux croissants et majorés par p. Quitte à renommer les vecteurs au cours de cette construction, on voit qu'il existe une famille libre $\mathcal{B} = (x_1, \cdots, x_n)$ de cardinal maximal n et vérifiant $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de E. Il s'agit de montrer que $\mathcal{B}$ engendre E.

Si $n = p$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{G}$ est génératrice.

Si $n < p$, alors pour tout $h \geq n + 1$ on a $x_h \in \text{Vect}(\mathcal{B})$ car n est maximal. Ainsi $\mathcal{B}$ engendre E car $\mathcal{G}$ engendre E.

Le théorème de la base incomplète est donc démontré.

Corollaire 1 Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie. Alors E admet au moins une base.

Démonstration Par définition d'un espace vectoriel de dimension finie, E admet une famille génératrice $\mathcal{G} = (x_1, \cdots, x_p)$ de cardinal fini. L'un des vecteurs de $\mathcal{G}$ (par exemple x_1) est non nul, sinon $E = \{0\}$. Alors $\mathcal{L} = (x_1)$ est une famille libre. Le théorème de la base incomplète permet d'affirmer qu'il existe au moins une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$, c.q.f.d.

Remarque 1 Les espaces vectoriels usuels, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[x]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, étudiés dans le chapitre 45 de TLM1, sont tous de dimension finie. Il n'est pas nécessaire d'invoquer le théorème de la base incomplète pour les introduire, car on fait apparaître *naturellement* dans chaque cas une base privilégiée, la base canonique. Cependant, les théorèmes étudiés dans ce complément sont importants pour une étude approfondie.

2 Théorème de la dimension

Nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant :

Lemme 1 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_n)$ *une famille de* n *vecteurs de* E *et* $\mathcal{H} = (y_1, \cdots, y_{n+1})$ *une famille de* $n+1$ *vecteurs de* E*. On suppose que, pour tout* $i \in \{1..n+1\}$, $y_i \in \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$*. Alors* $\mathcal{H} = (y_1, \cdots, y_{n+1})$ *est liée.*

Démonstration Elle se fait par récurrence sur n.

La propriété est vraie pour $n = 1$: dans ce cas, $\mathcal{F} = (x_1)$, $\mathcal{H} = (y_1, y_2)$, et il existe deux scalaires α et β tels que $y_1 = \alpha x_1$ et $y_2 = \beta x_1$. Alors l'un des deux nombres α et β est différent de 0 car $y_1 \neq y_2$, et on a $\beta y_1 - \alpha y_2 = 0$, ce qui prouve que $\mathcal{H}$ est liée.

Montrons que la propriété est héréditaire. Supposons donc qu'elle est vraie pour un n fixé, $n \geq 1$. Soient $(y_1, \cdots, y_{n+2})$ $n+2$ vecteurs combinaisons linéaires de $(x_1, \cdots, x_{n+1})$. Il existe donc des scalaires $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n+2 \\ 1 \leq j \leq n+1}}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{lllll} y_1 = & \lambda_{1,1}x_1 + & \lambda_{1,2}x_2 + & \cdots + & \lambda_{1,n+1}x_{n+1} \\ y_2 = & \lambda_{2,1}x_1 + & \lambda_{2,2}x_2 + & \cdots + & \lambda_{2,n+1}x_{n+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ y_{n+2} = & \lambda_{n+2,1}x_1 + & \lambda_{n+2,2}x_2 + & \cdots + & \lambda_{n+2,n+1}x_{n+1} \end{array}\right.$$

Premier cas : tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls (et les y_i aussi) et dans ce cas on a $1 \times y_1 + 0 \times y_2 + \cdots 0 \times y_{n+2} = 0$, ce qui signifie que la famille $(y_1, \cdots, y_{n+2})$ est liée.

Deuxième cas : un des $\lambda_{i,j}$ est non nul. Quitte à renommer les vecteurs, on peut supposer que $\lambda_{1,1} \neq 0$. On utilise alors la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} & y_1 & = & \lambda_{1,1}x_1 + & \lambda_{1,2}x_2 + & \cdots + & \lambda_{1,n+1}x_{n+1} \\ z_1 = & y_2 - \frac{\lambda_{2,1}}{\lambda_{1,1}}y_1 & = & & \mu_{2,2}x_2 + & \cdots + & \mu_{2,n+1}x_{n+1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ z_{n+1} = & y_{n+2} - \frac{\lambda_{n+1,1}}{\lambda_{1,1}}y_1 & = & & \mu_{n+2,2}x_2 + & \cdots + & \mu_{n+2,n+1}x_{n+1} \end{array}\right.$$

où les $\mu_{i,j}$ sont des scalaires. Les $(z_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ sont ainsi $n+1$ vecteurs combinaisons linéaires des n vecteurs $(x_2, \cdots, x_{n+1})$. D'après l'hypothèse de récurrence, ils sont liés.

Il existe donc $n+1$ scalaires non tous nuls $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1})$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i z_i = 0$.

Alors $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \left(y_{i+1} - \frac{\lambda_{i+1,1}}{\lambda_{1,1}} y_1\right) = 0$, ce qui peut s'écrire $\left(-\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\lambda_{i+1,1}}{\lambda_{1,1}}\right) y_1 + \alpha_1 y_2 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+2} = 0$.

On a trouvé une combinaison linéaire non triviale des $(y_i)_{1 \leq i \leq n+2}$. Ainsi cette famille est liée, c.q.f.d.

Nous énonçons maintenant et démontrons le *théorème de la dimension* :

Théorème 2 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,* $E \neq \{0\}$*. Alors toutes les bases de* E *ont même nombre fini d'éléments. Ce nombre commun est appelé la* dimension *de* E *et se note* $\dim E$.

Démonstration Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Supposons que le cardinal de $\mathcal{B}$ soit strictement supérieur à celui de $\mathcal{B}'$. Alors $\mathcal{B} = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\mathcal{B}' = (y_1, \cdots, y_p)$ avec $p > n$. Puisque $\mathcal{B}$ est génératrice, les $n+1$ premiers vecteurs de $\mathcal{B}'$ sont combinaisons linéaires des n vecteurs de $\mathcal{B}'$, donc sont liés par le lemme 1. Ceci est absurde puisque $\mathcal{B}'$ est libre. Ainsi $\mathrm{card}(\mathcal{B}') \leq \mathrm{card}(\mathcal{B})$. Par symétrie des rôles, on a $\mathrm{card}(\mathcal{B}) \leq \mathrm{card}(\mathcal{B}')$, d'où $\mathrm{card}(\mathcal{B}') = \mathrm{card}(\mathcal{B})$, c.q.f.d.

3 Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

Théorème 3 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n*. Si* F *est un sous-espace vectoriel de* E, *alors* F *est de dimension finie et* $\dim F \leq \dim E$*. De plus* $\dim F = \dim E$ *si et seulement si* $F = E$.

Démonstration Si $F = \{0\}$ alors $\dim F = 0$, F est donc de dimension finie et on a bien $\dim F \leq \dim E$.

Sinon, soit $\mathcal{B}$ une base de F (une telle base existe par le théorème de la base incomplète car F est un espace vectoriel) Alors $\mathcal{B}$ est une famille de vecteurs libres de F, donc de E. Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathcal{B}$ pour obtenir une base de E. Donc le nombre de vecteurs de $\mathcal{B}$ est inférieur ou égal à la dimension de E, c'est-à-dire $\dim F \leq \dim E$.
Enfin, si $p = n$, alors $\mathcal{B}$ est une famille libre de E ayant $n = \dim E$ éléments, c'est donc une base de E. Ceci prouve que $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = F$. Réciproquement si $E = F$, on a bien $\dim F = \dim E$.

Le théorème suivant relie les dimensions des sous-espaces $F \cap G$ et $F + G$ (voir le complément de cours *sous-espaces supplémentaires* sur le site touteslesmaths.fr).

Théorème 4 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F+G$ est de dimension finie et on a*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G). \tag{1}$$

Démonstration Soit $\mathcal{B}$ une base de $F \cap G$. On la complète en une base $\mathcal{B}'$ de F et en une base $\mathcal{B}''$ de G. Alors $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ est une base de $F + G$ et $\mathcal{B}' \cap \mathcal{B}'' = \mathcal{B}$. Or on a (théorème 33.2 de TLM1, page 423) :

$$\mathrm{card}(\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}'') = \mathrm{card}\,\mathcal{B} + \mathrm{card}\,\mathcal{B}' - \mathrm{card}(\mathcal{B}' \cap \mathcal{B}'').$$

Cela signifie exactement que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

La figure 1 illustre ce théorème dans le cas où F et G sont deux plans sécants de $\mathbb{R}^3$. Dans ce cas $F \cap G$ est une droite vectorielle $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}\right)$, une base de F est $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, et une base de G est $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$. La somme $F + G$, qui n'est pas directe, est égale à $\mathbb{R}^3$.

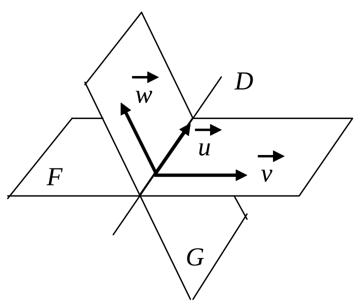

Figure 1

Dans le cas où la somme $F + G$ est *directe*, on a $F \cap G = \{0\}$. Puisque $\dim(\{0\}) = 0$, on obtient immédiatement le

Corollaire 2 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe. Alors*

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G. \tag{2}$$

4 Théorème du rang

Dans cette section, nous démontrons le *théorème du rang*, que nous avons admis dans TLM1, page 608. Nous aurons besoin des deux résultats préliminaires suivants :

Lemme 2 *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, alors tout sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire dans E.*

Démonstration Il suffit de prendre une base $\left(\overrightarrow{x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_p}\right)$ de F et de la compléter en une base $\left(\overrightarrow{x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_n}\right)$ de E. Alors $G = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{x_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{x_n}\right)$ est un supplémentaire de F dans G.

Lemme 3 *Soit f une application linéaire injective de E dans F. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Alors la famille des images $(f(x_1), \cdots, f(x_n))$ est une famille libre de vecteurs de F.*

Démonstration Soit $\lambda_1 f(x_1)+\cdots+\lambda_n f(x_n)=0$ une combinaison linéaire des images égale au vecteur nul. Puisque f est linéaire, on a $f(\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n)=0$. Puisque f est injective, son noyau est réduit au vecteur nul, donc $\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n=0$. Enfin, puisque $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille libre, il vient $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. Ceci prouve que $(f(x_i))_{1\leq i\leq n}$ est une famille libre.

Démontrons maintenant le théorème du rang :

Théorème 5 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimension finie* n*, et soit* $f\in\mathcal{L}(E,F)$. *Alors*

$$n=\dim E=\dim(\operatorname{Ker} f)+\operatorname{rg} f=\dim(\operatorname{Ker} f)+\dim(\operatorname{Im} f). \tag{3}$$

Démonstration : Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E (lemme 2). On a alors $E=\operatorname{Ker} f\oplus G$. Soit $g:G\to\operatorname{Im} f$, définie par $g(x)=f(x)$ pour tout $x\in G$. Alors :

- g est linéaire car f l'est.
- g est injective : En effet, si $x\in G$ vérifie $g(x)=0$, on a aussi $f(x)=0$ car $g(x)=f(x)$ pour tout $x\in G$. On a donc aussi $x\in\operatorname{Ker} f$. Ainsi $x\in G\cap\operatorname{Ker} f=\{0\}$ car la somme est directe. Donc $\operatorname{Ker} g=\{0\}$ et g est injective (théorème 46.3 de TLM1, page 604).
- g est surjective : Soit $y\in\operatorname{Im} f$. Il existe donc $x\in E$ tel que $y=f(x)$. On cherche un élément de G ayant pour image y. A priori x ne convient pas, car rien ne dit que $x\in G$. Mais puisque $E=\operatorname{Ker} f\oplus G$, il existe $x_0\in\operatorname{Ker} f$ et $x_G\in G$ tels que $x=x_0+x_G$. Alors

$$f(x)=f(x_0)+f(x_G)=0+f(x_G)=f(x_G),$$

car $x_0\in\operatorname{Ker} f$. Puisque $x_G\in G$, $g(x_G)$ existe et $g(x_G)=f(x_G)=y$. On a bien trouvé un antécédent de y par g.

Posons alors $n=\dim E$, $p=\dim G$, et considérons une base $(e_1,e_2,...,e_p)$ de G. En vertu du lemme 2, on sait que $(g(e_1),g(e_2),...,g(e_p))$ est libre.

Puisque g est surjective, on a $\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}(g(e_1),g(e_2),...,g(e_p))$.

Ainsi $(g(e_1),g(e_2),...,g(e_p))$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et $\dim(\operatorname{Im} f)=p=\dim G$.

La relation $E=G\oplus\operatorname{Ker} f$ implique alors $\dim E=\dim(\operatorname{Ker} f)+\dim G=\dim(\operatorname{Ker} f)+\dim(\operatorname{Im} f)$.

Dans la démonstration du théorème du rang, nous avons vu que g est une application linéaire bijective de G dans $\operatorname{Im} f$.

Définition 2 *Une application linéaire bijective de l'espace vectoriel* E *dans l'espace vectoriel* F *s'appelle un* isomorphisme *de* E *dans* F. *On dit alors que* E *et* F *sont* isomorphes.

Ainsi l'application linéaire bijective g que nous avons rencontrée dans la démonstration du théorème du rang est-elle un isomorphisme de G dans $\operatorname{Im} f$.

On notera que la définition 2 ne suppose pas que E et F soient de dimension finie. Dans ce cadre général, on a le résultat suivant :

Théorème 6 *Soient* E *et* F *deux espace vectoriels isomorphes, et* f *un isomorphisme de* E *dans* F. *Alors* f^{-1} *est un isomorphisme de* F *dans* E.

Démonstration On sait déjà que f^{-1} est bijective de F dans E (sous-section 33.5.4, page 429 de TLM1). Puisque f^{-1} est linéaire (voir exercice 3), f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Théorème 7 *Soient* E *et* F *deux espace vectoriels isomorphes. On suppose que* E *est de dimension finie. Alors* F *est de dimension finie et* $\dim F=\dim E$.

Démonstration Soit f un isomorphisme de E dans F. Notons $n=\dim E$, et soit $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ une base de E. Alors f est aussi un isomorphisme de E dans $\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Vect}[f(e_1),f(e_2),\cdots,f(e_n)]$. Puisque f est injective, on a $\operatorname{Ker} f=\{0\}$, donc d'après le théorème du rang $\dim E=\dim(\operatorname{Im}(f))=n$. Puisque f est surjective de E dans F, on a $F=\operatorname{Im}(f)$, d'où $\dim F=n=\dim E$, c.q.f.d.

Théorème 8 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimension finie, tels que* $\dim E=\dim F$. *Soit* $f\in\mathcal{L}(E,F)$. *Alors* f *est un isomorphisme de* E *dans* F *si, et seulement si,* f *est injective* ou *surjective.*

Démonstration Si f est un isomorphisme, alors elle est bijective, donc injective et surjective.

Réciproquement, si f est injective, on a $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, donc d'après le théorème du rang $\dim E = \operatorname{rg} f$. Ceci entraîne que $\dim F = \dim(\operatorname{Im} f)$, c'est-à-dire $F = \operatorname{Im} f$ (théorème 3 ci-dessus) et f est surjective. Ainsi f est injective et surjective, elle est bijective.

De même, si f est surjective, alors $\operatorname{rg} f = \dim F$. Du théorème du rang on déduit alors $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$, ce qui signifie que f est aussi injective.

Exercices

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimension 3, tels que $E_1 \neq E_2$. Déterminer la dimension de $E_1 \cap E_2$.

Exercice 3 Démontrer que, si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est linéaire.

Solutions des exercices

Exercice 1 On a $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) > n - \dim(F+G)$.

Or $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, donc $\dim(F+G) \leq n$, c'est-à-dire $-\dim(F+G) \geq -n$.

On a donc $\dim(F \cap G) > n - n = 0$ et puisqu'une dimension est un entier, on a $\dim(F \cap G) \geq 1$. Ainsi $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 2 On a $\dim(E_1 + E_2) \geq \dim E_1 = 3$. Donc $\dim(E_1 + E_2) = 3$ ou 4. Si $\dim(E_1 + E_2) = 3$, alors $E_1 \subset E_1 + E_2$ et $\dim E_1 = \dim(E_1 + E_2) \Rightarrow E_1 = E_1 + E_2$. De même $E_2 = E_1 + E_2$. Donc $E_1 = E_2$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $\dim(E_1 + E_2) = 4$.

Par suite $\dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 + E_2) = 2$.

Exercice 3 Soient u et v deux éléments de F, et soient λ et μ deux réels.

On cherche à démontrer que $f^{-1}(\lambda u + \mu v) = \lambda f^{-1}(u) + \mu f^{-1}(v)$. Or, puisque f est bijective de E dans F, il existe un couple unique d'éléments $(x, y) \in E^2$ tels que $u = f(x)$ et $v = f(y)$. On a donc

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda u + \mu v) &= f^{-1}(\lambda f(x) + \mu f(y)) = f^{-1}\left[(f(\lambda x + \mu y)\right] \quad \text{(car } f \text{ linéaire)} \\ &= \lambda x + \mu y = \lambda f^{-1}(u) + \mu f^{-1}(v), \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$