EXPOSANTS RATIONNELS

Le but de ce complément est de démontrer les propriétés des exposants rationnels, admises dans TLM1 (théorème 11.1 page 124).

1 Propriétés des exposants entiers

Nous montrons d'abord comment les propriétés $x^n x^m = x^{n+m}$ et $(x^n)^m = x^{nm}$, qui sont évidentes dans le cas où n et m sont des entiers positifs ou nuls (formules 11.3 page 123 de TLM1), restent vraies pour des entiers positifs ou négatifs. Rappelons que, *par définition*, si $n < 0$, alors

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}}. \tag{1}$$

Théorème 1 *Soit* $m \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$, *et soit* $x > 0$. *Alors on a*

$$x^m.x^n = x^{m+n}. \tag{2}$$

Démonstration On distingue plusieurs cas.
a) Si $m = 0$ ou $n = 0$, le résultat est vrai car $x^0 = 1$ par définition. On peut donc supposer $m \neq 0$ et $n \neq 0$.
b) Si $m > 0$ et $n > 0$ le résultat est vrai par définition de l'exposant (formules 11.3 page 123 de TLM1).
c) Supposons maintenant que m et n sont de signes contraires, par exemple $m > 0$ et $n < 0$.
Posons $p = -n$. Alors $p > 0$ et

$$x^m.x^n = \frac{x^m}{x^{-n}} = \frac{x^m}{x^p}.$$

Si $m \geq p$, on a au numérateur m facteurs x, et au dénominateur p facteurs x. Donc après simplification

$$x^m.x^n = \frac{x^m}{x^p} = x^{m-p} = x^{m+n}.$$

Si $p > m$, on a de même

$$x^m.x^n = \frac{x^m}{x^p} = \frac{1}{x^{p-m}} = x^{m-p} = x^{m+n}.$$

Donc (2) est démontré dans le cas où m et n sont de signes contraires.
d) Supposons enfin que $m < 0$ et $n < 0$. Alors $-m > 0$ et $-n < 0$. Donc

$$x^m.x^n = \frac{1}{x^{-m}}.\frac{1}{x^{-n}} = \frac{1}{x^{-m}x^{-n}} = \frac{1}{x^{-m-n}} = \frac{1}{x^{-(m+n)}} = x^{m+n}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Théorème 2 *Soit* $m \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$, *et soit* $x > 0$. *Alors on a*

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}. \tag{3}$$

Démonstration Il suffit d'appliquer le théorème 1 car

$$\frac{x^m}{x^n} = x^m \times \frac{1}{x^n} = x^m x^{-n} = x^{m-n}.$$

Théorème 3 *Soit* $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$, *et soit* $x > 0$. *Alors on a*

$$(x^m)^n = x^{mn}. \tag{4}$$

Démonstration On distingue de nouveau plusieurs cas.
a) Si $m = 0$ ou $n = 0$, le résultat est vrai car $x^0 = 1$ par définition. On peut donc supposer $m \neq 0$ et $n \neq 0$.

b) Si $m > 0$ et $n > 0$ le résultat est vrai par définition de l'exposant (double exponentiation).
c) Si $m > 0$ et $n < 0$, en posant $p = -n$ on voit que

$$(x^m)^n = (x^m)^{-p} = \frac{1}{(x^m)^p} = \frac{1}{x^{np}} = \frac{1}{x^{-mn}} = x^{mn}.$$

d) Si $m < 0$ et $n > 0$, en posant $q = -m$ on obtient

$$(x^m)^n = \left(x^{-q}\right)^n = \left(\frac{1}{x^q}\right)^n = \frac{1}{(x^q)^n} = \frac{1}{x^{qn}} = \frac{1}{x^{-mn}} = x^{mn}.$$

e) Supposons enfin que $m < 0$ et $n < 0$. Alors en utilisant le résultat de c) on a

$$(x^m)^n = \frac{1}{(x^m)^{-n}} = \frac{1}{x^{-mn}} = x^{mn}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Théorème 4 *Soit $n \in \mathbb{Z}$, et soient $x > 0$, $y > 0$. Alors on a*

$$x^n y^n = (xy)^n .$$

Démonstration Le résultat est évident si $n \in \mathbb{N}$. Si $n < 0$, alors $-n > 0$ et par conséquent

$$x^n y^n = \frac{1}{x^{-n}} \times \frac{1}{y^{-n}} = \frac{1}{x^{-n}y^{-n}} = \frac{1}{(xy)^{-n}} = (xy)^{-n} , \quad \text{C.Q.F.D.}$$

2 Propriétés des radicaux

Rappelons que, pour tout $x > 0$ et pour tout entier $q \geq 1$, $\sqrt[q]{x}$ est l'unique réel positif qui vérifie

$$\left(\sqrt[q]{x}\right)^q = x. \tag{5}$$

Théorème 5 *Soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$, avec $p \geq 1$, $q \geq 1$, et soit $x > 0$. Alors*

$$\sqrt[p]{\left(\sqrt[q]{x}\right)} = \sqrt[pq]{x}.$$

Démonstration En effet on a par double exponentiation

$$\left(\sqrt[p]{\left(\sqrt[q]{x}\right)}\right)^{pq} = \left(\left(\sqrt[p]{\left(\sqrt[q]{x}\right)}\right)^p\right)^q = \left(\left(\sqrt[q]{x}\right)\right)^q = x.$$

Théorème 6 *Soit $q \in \mathbb{N}$, avec $q \geq 1$, et soit $x > 0$, $y > 0$. Alors*

$$\sqrt[q]{x}.\,\sqrt[q]{y} = \sqrt[q]{xy}.$$

Démonstration Il suffit de remarquer que

$$\left(\sqrt[q]{x}.\,\sqrt[q]{y}\right)^q = \left(\sqrt[q]{x}\right)^q \left(\sqrt[q]{y}\right)^q = xy.$$

3 Propriétés des exposants rationnels

Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, écrit sous forme irréductible. Les exposants rationnels sont définis par

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p . \tag{6}$$

(voir TLM1, formule 11.7 page 124).
On notera que la définition (2) reste vraie pour n'importe quel représentant $\frac{p'}{q'}$ de r, même si $\frac{p'}{q'}$ n'est pas irréductible.
En effet, si $r = \frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}$, où $\frac{p}{q}$ est irréductible, alors il existe un entier $d \geq 1$ tel que $p' = dp$ et $q' = dq$.

Donc, en vertu des propriétés des exposants entiers et des radicaux,

$$\left(\sqrt[q']{x}\right)^{p'} = \left(\sqrt[dq]{x}\right)^{dp} = \left(\left(\sqrt[dq]{x}\right)^{d}\right)^{p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^{p} = x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{p'}{q'}}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

On a donc, pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$,

$$x^{r} = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^{p} = \sqrt[q]{x^{p}}. \tag{7}$$

La dernière égalité de (3) résulte de ce que

$$\left(\left(\sqrt[q]{x}\right)^{p}\right)^{q} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^{pq} = \left(\left(\sqrt[q]{x}\right)^{q}\right)^{p} = x^{p}.$$

Théorème 7 *Pour tous nombres rationnels* r *et* s *et tout réel strictement positif* x, *on a*

$$x^{r}.x^{s} = x^{r+s} \tag{8}$$

Démonstration Posons $r = \frac{p}{q}$ et $s = \frac{t}{q}$ avec $q > 0$ (on réduit r et s au même dénominateur). Alors par définition, en utilisant le théorème 1,

$$x^{r}x^{s} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^{p}\left(\sqrt[q]{x}\right)^{t} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^{p+t} = x^{\frac{p+t}{q}} = x^{r+s}. \tag{9}$$

Théorème 8 *Pour tous nombres rationnels* r *et* s *et tout réel strictement positif* x, *on a*

$$\frac{x^{r}}{x^{s}} = x^{r-s} \tag{10}$$

Démonstration Posons à nouveau $r = \frac{p}{q}$ et $s = \frac{t}{q}$ avec $q > 0$. Alors, en vertu du théorème 2,

$$\frac{x^{r}}{x^{s}} = \frac{\left(\sqrt[q]{x}\right)^{p}}{\left(\sqrt[q]{x}\right)^{t}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^{p-t} = x^{\frac{p-t}{q}} = x^{r-s}.$$

Théorème 9 *Pour tous nombres rationnels* r *et* s *et tout réel strictement positif* x, *on a*

$$\left(x^{r}\right)^{s} = x^{rs} \tag{11}$$

Démonstration Posons $r = \frac{a}{b}$ et $s = \frac{p}{q}$. En utilisant deux fois la dernière égalité de (7) et le théorème 5, il vient

$$\left(x^{r}\right)^{s} = \left(x^{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{\left(\sqrt[b]{x}\right)^{a}}\right)^{p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[b]{x}\right)^{ap}} = \sqrt[q]{\sqrt[b]{x^{ap}}} = \sqrt[qb]{x^{ap}} = x^{\frac{ap}{qb}} = x^{rs}.$$

Théorème 10 *Pour tous nombres rationnels* r *et* s *et tous réels strictement positifs* x *et* y, *on a*

$$x^{r}y^{r} = (xy)^{r}.$$

Démonstration En posant $r = \frac{a}{b}$, on peut écrire, en utilisant les théorèmes 4 et 6,

$$x^{r}y^{r} = \left(\sqrt[b]{x}\right)^{a}\left(\sqrt[b]{y}\right)^{a} = \left(\sqrt[b]{x}\,\sqrt[b]{y}\right)^{a} = \left(\sqrt[b]{xy}\right)^{a} = (xy)^{r}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$